UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Probabilidade e Estatística - Padrão de Resposta da P1

1. Sejam os eventos

   A=Alberto acerta o alvo, B=Bernado acerta o alvo, C= Carlos acerta o alvo;

   D = O alvo ser atingido;
   E = O alvo ser atingido por somente um dos atiradores;
   F = No máximo um dos três atiradores acerta o alvo.

   Temos que A, B e C são independentes e $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(B) = \frac{3}{4}$ e $P(C) = \frac{1}{2}$.
   Para não carregar a notação suprimiremos o sinal de interseção. Por exemplo, o evento $A^c \cap B \cap C$ será denotado por A^cBC.

   (a) $P(D) = 1 - P(A^cB^cC^c) \underbrace{=}_{\text{pela independência}} 1 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{23}{24} \approx 0,958;$

   (b) $P(E) = P(A^cB^cC \cup A^cBC^c \cup AB^cC^c) \underbrace{=}_{\text{eventos disjuntos}} = P(A^cB^cC) + P(A^cBC^c) + P(AB^cC^c) =$

   $$\underbrace{=}_{\text{pela independência}} = \frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1+3+2}{24} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

   (c) $P(F) = P(A^cB^cC^c \cup A^cB^cC \cup A^cBC^c \cup AB^cC^c) \underbrace{=}_{\text{eventos disjuntos e independência}} \frac{1+1+3+2}{24} = \frac{7}{24}$

   $\approx 0,292.$

   (d) $P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(AB^cC^c)}{P(F)} = \frac{2/24}{7/24} = \frac{2}{7} \approx 0,286.$

2. Jogo de basquete/Educação Física/Desafio

(a) Seja X a variável aleatória que representa o número de acertos ao cesto em 20 jogadas. Nesse caso, $X \sim$ Binomial$(20, p)$. Tem-se que $E(X) = 20p = 15$, então $p = 0,75$. A probabilidade $P(X \geq 17)$ é dada por:

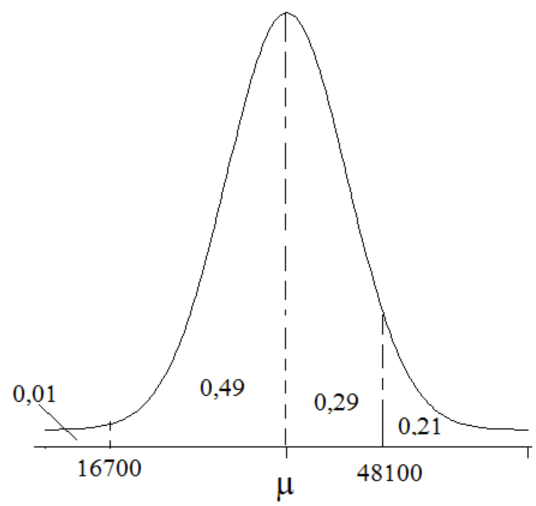
$$P(X \geq 17) = \sum_{x=17}^{20} \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} 0,75^x 0,25^{1-x} \approx 0,225$$

(b) Como $X \sim$ Binomial$(20, 0,75)$, então $Var(X) = 20 \times 0,75 \times 0,25) = 3,75$.

(c) Seja Y o número de erros ao cesto em 300 jogadas, temos que $X \sim Binomial(300, p = 0,01)$, que pode ser aproximada por uma $Poisson(3)$.

Logo, $P(Y \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} \frac{e^{-3}3^x}{x!} \approx 0,423.$

3. A figura a seguir ilustras as informações dadas.



(a) De acordo com a figura e usando a tabela da distribuição normal padrão tem-se que

$$P\left(Z < \frac{48.100-\mu}{\sigma}\right) = 0,79 \quad \rightarrow \quad \frac{48.100-\mu}{\sigma} \approx 0,81$$

$$P\left(Z < \frac{16.700-\mu}{\sigma}\right) = 0,01 \quad \rightarrow \quad P\left(Z < \frac{\mu-16.700}{\sigma}\right) \approx 0,99$$

$$\text{tal que} \qquad \frac{\mu-16.700}{\sigma} \approx 2,33$$

Logo, temos o seguinte sistema $\begin{cases} 48.100-\mu = 0,81\sigma \\ \mu - 16.700 = 2,33\sigma \end{cases}$ que resulta em $\mu = 40.000$ e $\sigma = 10.000$

(b)

$$P(X > 55.000) = P\left(Z > \frac{55.000-40.000}{10.000}\right) = P(Z > 1,5) = 1 - 0,9332 = 0,0668$$

4. Assistência ar condicionado

   (a) Não, pois a função de probabilidade conjunta de X e Y não fatora nas funções de probabilidade marginais. Por exemplo, $p(0,3) = 0,23$, mas $p_X(0) = 0,36$, $p_Y(3) = 0,41$ e $0,36 \times 0,41 \neq 0,23$.

   (b)

$$p(X = k|Y = 5) = \frac{p(k,5)}{p_Y(5)} = \frac{p(k,5)}{0,24} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & X = 0 \\ \frac{7}{24}, & X = 1 \\ \frac{7}{12}, & X = 2 \end{cases}$$

(c)

$$\mathsf{E}\left[\frac{X}{Y}\right] = \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=3}^{5}\frac{x}{y}p(x,y) = 0+\frac{1}{3}\times 0,11+\frac{1}{4}\times 0,16+\frac{1}{5}\times 0,07+\frac{2}{3}\times 0,07+\frac{2}{4}\times 0,09+\frac{2}{5}\times 0,14 \approx 0,238$$