UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Probabilidade e Estatística

Prova #1 **14-01-2016**

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.

1. Admita que, em determinada localidade, se um trabalhador do comércio ficar desempregado, a probabilidade de que ele consiga um novo emprego similar dentro de 6 meses é de $0,6$. Caso contrário (com probabilidade $0,4$), ele abre seu próprio negócio. Sabe-se também que, tendo conseguido um novo emprego assalariado, em 5% das vezes sua família troca as crianças de colégio. Já os que montam seu próprio negócio trocam suas crianças de colégio em 15% das vezes. Se neste local for selecionado um trabalhador do comércio recém-desempregado:

   (a) Qual a probabilidade de que suas crianças mudem de escola?

   (b) Dado que as crianças de fato trocaram de escola, qual a probabilidade de que ele tenha conseguido um novo emprego?

2. Suspeita-se que o processo de produção de certo tipo de componente esteja desregulado. Para decidir sobre a medida a ser tomada para sanar o problema, o departamento de produção resolveu conduzir um experimento em que 10 componentes serão sorteados ao acaso da linha de produção. Seja X o número de componentes fora das especificações entre eles. Considerando que a proporção de componentes fora das especificações na linha de produção como um todo seja de 30%:

   (a) Qual o valor mais provável de X e qual sua probabilidade?

   (b) Admitindo que:

   - Se $X \geq 5$, será efetuado um gasto total de 1000 reais para aprimorar a qualidade da produção.
   - Se $2 \leq X \leq 4$, esse gasto será de 300 reais.
   - Se $X \leq 1$, não será efetuado nenhum gasto.

   Qual é o valor do gasto médio a ser efetuado?

   A função de distribuição acumulada da Binomial$(10; 0,3)$ é fornecida, para facilitar os cálculos:

Valores de X	$(-\infty; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$[3; 4)$	$[4; 5)$	$[5; 6)$	$[6; 7)$	$[7; 8)$	$[8; 9)$	$[9; 10)$	$[10; \infty)$
$F(x)$	0	0,028	0,149	0,383	0,650	0,850	0,953	0,989	0,998	1,000	1,000	1,000

3. Considere que a demanda mensal de arroz em um restaurante a quilo, em toneladas, seja descrita por uma variável aleatória X, cuja função densidade é fornecida abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(6x - x^2 - 5), \text{para } 1 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Calcule a probabilidade de que, em um determinado mês, a demanda arroz esteja entre 2 e 4 toneladas.

   (b) Calcule a probabilidade de que, em um determinado mês, a demanda de arroz seja superior a 2 toneladas, dado que essa demanda foi inferior a 4 toneladas.

   (c) Refaça os itens (a) e (b), supondo que a demanda mensal de arroz, em toneladas, tenha uma distribuição normal com média 3 e variância $0,64$.

4. Uma empresa transporta carga e o custo $C(X)$ do transporte, em u.m., depende do peso X, em toneladas, da carga a ser transportada, conforme a tabela abaixo:

Valores de X	$X < 4$	$4 < X < 5$	$5 < X < 6$	$X > 6$
$C(X)$	\$400	\$600	\$800	\$1500

   Se o peso da carga a ser transportada for uma variável aleatória X com distribuição Normal$(5; 0,25)$, determine:

   (a) O valor esperado do custo do transporte.

   (b) O desvio padrão do custo do transporte.

Boa prova!

SOLUÇÕES

1. Defina os eventos: E = "Obter um novo emprego" T = "Trocar as crianças da escola".
   Então, $P(E) = 0,6$, $P(E^c) = 0,4$, $P(T|E) = 0,05$ e $P(T|E^c) = 0,15$.

   (a) Como E e E^c formam uma partição do espaço amostral, segue pelo Teorema da Probabilidade total que:

$$P(T) = P(T|E)P(E) + P(T|E^c)P(E^c) = 0,05 \times 0,6 + 0,15 \times 0,4 = 0,09$$

   (b) Pelo Teorema de Bayes:

$$P(E|T) = \frac{P(T|E)P(E)}{P(T)} = \frac{0,05 \times 0,6}{0,09} = \frac{1}{3}$$

2. De acordo com enunciado, temos que $X \sim \text{Binomial}(10; 0,3)$

   (a) Para resolver esse item é preciso obter a função de probabilidade de X, o que pode ser feito tomando as diferenças na função acumulada que já foi fornecida, ou seja, $p(x) = F(x) - F(x-1)$. Dessa forma obtemos:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	0,03	0,121	0,233	0,267	0,200	0,103	0,037	0,009	0,001	0,000	0,000

   Isso mostra que o valor mais provável é $X = 3$ e que $p(3) = 0,267$.

   (b) Denotando por Y o gasto a ser efetuado, em reais, temos:

$$Y = H(x) = \begin{cases} 1000, \text{se } X \geq 5 \\ 300, \text{se } 2 \leq X \leq 4 \\ 0, \text{se } X \leq 1 \end{cases}$$

   Então, segue que:

$$E(Y) = 1000\ P(X \geq 5) + 300\ P(2 \leq X \leq 4) + 0\ P(X \leq 1) = 1000\ (1 - F(4)) + 300\ (F(4) - F(1)) =$$

$$= 1000\ (1 - 0,850) + 300\ (0,850 - 0,149) = 360,39 \text{ reais.}$$

3. **(a)**

$$P(2 < X < 4) = \int_2^4 \frac{3}{32}(6x - x^2 - 5)dx = \frac{3}{32}\left[3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x\right]_2^4 = \frac{11}{16} = 0,688$$

   (b)

$$P(X > 2|X < 4) = \frac{P(2 < X < 4)}{P(X < 4)} = \frac{0,688}{\int_1^4 \frac{3}{32}(6x - x^2 - 5)dx} = \frac{0,688}{\frac{3}{32}\left[3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x\right]_1^4} = \frac{0,688}{0,844} = 0,815$$

   (c) Seja Y a nova demanda. Então $Y \sim N(3; 0,64)$. Com isso:

$$P(2 < Y < 4) = P\left(\frac{2-3}{0,8} < \frac{Y-3}{0,8} < \frac{4-3}{0,8}\right) = P(-1,25 < Z < 1,25) = 2\Phi(1,25) - 1 = 2 \times 0,894 - 1 = 0,798$$

$$P(Y > 2|Y < 4) = \frac{P(2 < Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{0,798}{P(Z < 1,25)} = \frac{0,798}{\Phi(1,25)} = \frac{0,798}{0,894} = 0,893$$

4. **(a)** O desvio padrão de X é $0,5$. Temos então que $Z = \frac{X-5}{0,5}$ tem distribuição normal padrão. Com isso, os valores de Z correspondentes a $X = 4,5$ e 6 são respectivamente $-2,0$ e 2. Logo:

$$P(X < 4) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$P(4 < X < 5) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0,5 - 0,0228 = 0,4772$$

$$P(5 < X < 6) = \Phi(2) - \Phi(0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$$

$$P(X > 6) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$

Então, $E(C(X)) = 400 \times 0,0228 + 600 \times 0,4772 + 800 \times 0,4772 + 1500 \times 0,0228 = 711,40$ u.m.

(b) $Var(C(X)) = 400^2 \times 0,0228 + 600^2 \times 0,4772 + 800^2 \times 0,4772 + 1500^2 \times 0,0228 - (711,40)^2 = 26058$ u.m.^{2}

DP(C(X)) $= \sqrt{Var(C(X))} = \sqrt{26058} = 161,43$ u.m.