UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Prova Final 28-02-2013

---

1. Uma caixa contém 6 lâmpadas das quais três estão queimadas. As lâmpadas são retiradas da caixa ao acaso, uma a uma, sem reposição e testadas. Seja X o número de lâmpadas testadas até que uma lâmpada queimada seja encontrada. Pede-se:

   (a) a função de probabilidade de X;

   (b) o valor esperado e a variância de X;

   (c) a probabilidade condicional $P(X < 2|X < 3)$.

   (a) Defina os eventos B_i: " a i-ésima lâmpada retirada é perfeita" e Q_i: "a i-ésima lâmpada retirada está queimada", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

   Observe que os possíveis valores da v.a. X são 1, 2, 3 e 4. Além disso, observe que

   $X = 1 \quad \leftrightarrow \quad \textsf{ocorre } Q_1$

   $X = 2 \quad \leftrightarrow \quad \textsf{ocorre } B_1 \cap Q_2$

   $X = 3 \quad \leftrightarrow \quad \textsf{ocorre } B_1 \cap B_2 \cap Q_3$

   $X = 4 \quad \leftrightarrow \quad \textsf{ocorre } B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap Q_3$

   Portanto, $P(X = 1) = P(Q_1) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$, $P(X = 2) = P(B_1 \cap Q_2) = P(B_1)P(Q_2|B_1) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{10}$,

   $P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap Q_3) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(Q_3|B_1 \cap B_2) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{20}$ e

   $P(X = 4) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap Q_4) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2)P(Q_4|B_1 \cap B_2 \cap B_3) = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{3} = \dfrac{1}{20}$.

   Resposta:

x	$p_X(x)$
1	1/2
2	3/10
3	3/20
4	1/20
total	1

   (b) $\mathsf{E}[X] = \sum_{x=1}^{4} x p_X(x) = \frac{1}{20}(10 + 12 + 9 + 4) = \frac{7}{4}$

   $\mathsf{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{4} x^2 p_X(x) = \frac{1}{20}(10 + 24 + 27 + 16) = \frac{77}{20}$

   $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}^2[X] = \frac{77}{20} - \frac{49}{16} = \frac{63}{80}$

   (c)
   $$P(X < 2|X < 3) = \frac{P\left([X < 2] \cap [X < 3]\right)}{P(X < 3)} = \frac{P(X < 2)}{P(X < 3)} = \frac{1/2}{8/10} = \frac{5}{8}.$$

2. Os pesos das peças num processo industrial são Normalmente distribuídos com média de 2 kg e desvio-padrão de 0,2 kg.

   (a) Determine a porcentagem de peças que têm pesos maiores do que 1,98 kg?

   (b) Para melhorar o processo, o Controle de Qualidade da empresa decidiu que apenas as peças com pesos maiores do que 1,68 kg e menores do que 2,32 kg serão comercializadas. Calcule a porcentagem de peças que serão rejeitadas, se esse critério for mantido.

(c) O plano é melhorar o processo industrial e fazer com que a porcentagem de peças rejeitadas pelo critério apresentado no item (b) seja de 1%. Qual é o desvio-padrão adequado para que esse objetivo seja atingido?

(a) Denote por X a variável peso, tal que $X \sim N\left((2, (0,2)^2\right)$.

$$P(X > 1,98) = \underbrace{P\left(Z > \frac{1,98-2}{0,2}\right)}_{Z \sim N(0,1)} = P(Z > -0,1) = \phi(0,1) = 0,5398$$

(b)

$$1 - P(1,68 < X < 2,32) = 1 - (\left(\frac{1,68-2}{0,2} < Z < \frac{2,32-2}{0,2}\right) = 1 - P(-1,6 < Z < 1,6) =$$

$$2(1-\phi(1,6)) = 2(1-0,9452) = 0,1096.$$

(c)

$$2\left(1-\phi\left(\frac{2,32-2}{\sigma}\right)\right) = 0,01 \quad \leftrightarrow 1-\phi\left(\frac{2,32-2}{\sigma}\right) = 0,005 \leftrightarrow \phi\left(\frac{2,32-2}{\sigma}\right) = 0,995$$

$$\leftrightarrow \frac{0,32}{\sigma} = 2,57 \leftrightarrow \sigma \simeq 0,12.$$

3. Deseja-se verificar a adequação do volume de um novo produto a ser lançado no mercado. Como o custo para amostrar é muito alto, o pesquisador deseja selecionar uma amostra de forma que o erro absoluto de estimação do volume médio não ultrapasse $\frac{1}{4}$ do desvio-padrão com nível de confiança de 0,90.

(a) Qual deve ser o tamanho da amostra?

(b) Com o tamanho amostral obtido no item anterior, calcule a probabilidade de que o erro absoluto de estimação do volume médio seja no máximo $\frac{1}{10}$ do desvio-padrão?

(c) Qual deve ser o tamanho da amostra caso se deseje que a probabilidade calculada no item anterior seja 96%?

(a)

$$n = \left(\frac{z_{1-\alpha/2\times\sigma}}{\sigma/4}\right)^2 = (1,64\times 4)^2 = 43,0336$$

Resposta: $n = 44$.

(b)

$$P\left(|\bar{X}-\mu| \leq \frac{\sigma}{10}\right) = P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{44}}{10}\right) \simeq P(|Z| \leq 0,66) = 2\phi(0,66) - 1 = 0,4908.$$

(c)

$$P\left(|Z| \leq \frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0,9 \leftrightarrow 2\phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) - 1 = 0,96 \leftrightarrow \phi\left(\frac{\sqrt{n}}{10}\right) = 0,98$$

$$\leftrightarrow \frac{\sqrt{n}}{10} = 2,05 \leftrightarrow n = (2,05\times 10)^2$$

Resposta: $n = 421$.

4. Numa fábrica foi selecionada uma amostra aleatória de parafusos cujos diâmetros (em mm) estão registrados na tabela a seguir.

10	10	11	11	12	12	12	12	12	13	13	13	13	13	13
13	13	13	13	13	14	14	14	14	15	15	15	15	16	16

com $\sum_{i=1}^{30} x_i = 393$ e $\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 5217$. Suponha que os diâmetros sejam Normalmente distribuídos. Pede-se:

(a) um intervalo de confiança para o diâmetro médio da produção de parafusos com nível de confiança de 95%;

(b) um intervalo de confiança para a proporção de parafusos que medem entre 12 mm e 14 mm (incluindo 12 e 14 mm), com coeficiente de confiança de 98%.

(c) Como você procederia num teste de hipóteses para verificar a seguinte afirmação do fabricante: "*O diâmetro médio dos parafusos é no máximo 12,5 mm.*"? Indique o p-valor correspondente.

(a)

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

Podemos construir o intervalo usando a distribuição t com $n-1$ graus de liberdade. Porém, como $n = 30$, a aproximação pela Normal também é aceitável.

Usando a distribuição t_{29} tem-se:

$$IC(\mu, 0,95) : \bar{X} \pm t_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} : 13,1 \pm 2,045 \frac{1,54}{\sqrt{30}} : 13,1 \pm 0,57.$$

Usando a distribuição Normal tem-se:

$$IC(\mu, 0,95) : \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} : 13,1 \pm 1,96 \frac{1,54}{\sqrt{30}} : 13,1 \pm 0,55.$$

(b) $\hat{p} = \frac{2}{3} \simeq 0,67$

Enfoque conservativo:

$$IC(p, 0,98) : \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{4n}} : 0,67 \pm 2,33 \frac{1}{\sqrt{120}} : 0,67 \pm 0,21.$$

ou

$$IC(p, 0,98) : \hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} : 0,67 \pm 2,33 \sqrt{\frac{2}{270}} : 0,67 \pm 0,20.$$

(c) $\begin{cases} H_0 : \mu \leq 12,5 \\ H_1 : \mu > 12,5 \end{cases}$ Valor amostral da estatística de teste $t_0 = \dfrac{13,1 - 12,5}{1,54/\sqrt{30}} \simeq 2,13.$

Usando a distribuição t_{29} e o valor amostral da estatística de teste observa-se pela tabela, $P(T > 2,042) = 0,025$ e $P(T > 2,147) = 0,02$, pois $2,042 < 2,13 < 2,147$. Portanto, $0,02 < p - \mathsf{valor} < 0,025$. Uma aproximação para o p-valor usando interpolação neste intervalo é dada por 0,021.

Usando a distribuição Normal tem-se $z_0 \simeq 2,13$ e $P(Z > 2,13) = 1 - \phi(2,13) = 1 - 0,9834 = 0,0166$.

Resposta: Como o p-valor é pequeno, cerca de 2%, conclui-se que os dados amostrais não trazem evidência a favor do fabricante tal que H_0 deve ser rejeitada.