Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
Prova Final de Estatística Unificada

Turma: Engenharia Data: 28/06/2012

---

1. Um médico (não muito profissional) utiliza o seguinte método para estabelecer a data precisa $D^{med.}$ do parto quando as mulheres grávidas lhe fazem essa pergunta: ele pega a data prevista $D^{prev.}$, que é obtida por considerações fisiológicas, lança 10 moedas no ar, e conta o número N^{caras} de caras e o número N^{coroas} de coroas. Ele então fornece a data
$$D^{med.} = D^{prev.} + [(N^{caras} - N^{coroas})dias].$$
Maria está grávida e a data do parto está prevista para o dia $D^{prev.} = 22$ de Julho.
   (a) Qual é a probabilidade de que a data dada pelo médico $D^{med.}$ e a data inicialmente prevista $D^{prev.}$ difiram de no máximo 2 dias?
   (b) João, o marido de Maria, deve aplicar a prova de segunda chamada de Probest no dia 12 de Julho. Qual é a probabilidade de que João não possa estar presente ao parto de Maria, segundo o método deste médico?

2. A temperatura (em °C) de determinado ambiente para a realização de um experimento é representada por uma variável aleatória X cuja densidade, simétrica em torno de 10°C, é dada por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(-x^2 + 20x - 96) & \text{, se } 8 < x < 12, \\ 0 & \text{, caso contário.} \end{cases}$$
Para que este experimento seja realizado em condições ideais de temperatura, ela não deve se afastar de 10°C por mais de 1°C.
   a) Obtenha a probabilidade do experimento ser realizado em condições ideais de temperatura.
   b) Uma vez que a conversão da temperatura F em graus Fahrenheit para a temperatura C em graus Celsius é dada pela fórmula C = (F - 32)/1,8, calcule o desvio padrão da temperatura, em graus Fahrenheit, deste ambiente.

3. A tabela a seguir representa a distribuição conjunta das v.a.'s **independentes** X e Y que está parcialmente conhecida:

X \ Y	-1	0	1	$p(x)$
0	1/18	c	1/6	
1				
$p(x)$		1/3		

   (a) Começando pela constante "c", determine todos os outros valores de $p(x, y)$, $p(x)$ e $p(y)$, isto é, complete a tabela.
   (b) Calcule $CV(X)$, o coeficiente de variação de X; e $Cov(X, Y)$, covariância de X e Y.

4. Suponha que, em uma fábrica de componentes eletrônicos, a resistência elétrica em quiloohms dos resistores produzidos deva ser mantida estável com uma média $\mu = 50k\Omega$ e um desvio padrão $\sigma = 5k\Omega$. Para controlar o processo produtivo, periodicamente são obtidas amostras de tamanho $n = 10$ resistores cujas resistências $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ são medidas e a seguinte regra de funcionamento é adotada: se a média aritmética $\bar{x}$ dos 10 x_i's for inferior a $48k\Omega$ ou superior a $52k\Omega$, a produção é interrompida para verificar se o processo saiu de controle; caso contrário, tudo continua normalmente. Admitindo que os valores medidos das resistências obedecem a uma lei de probabilidades Normal com média μ e desvio padrão $\sigma = 5k\Omega$:
   (a) Calcule a probabilidade de haver uma parada desnecessária (ou seja, com $\mu = 50k\Omega$) na produção.
   (b) Calcule a probabilidade de uma desregulagem que leve a média para $\mu = 47k\Omega$ não ser detectada quando se usa a regra acima.

5. Foi tomada uma amostra de 25 funcionários de um setor de uma empresa. A média amostral e a variância amostral dos salários (em s.m.) dos funcionários nesta amostra resultou em, respectivamente, 2,1 $s.m.$ e 0,09 $(s.m.^2)$. Assumindo distribuição Normal para os salários dos funcionários deste setor da empresa:

   a) construa um intervalo de confiança de 95% para a média dos salários dos funcionários deste setor;

   b) faça um teste de hipóteses adequado para inferir, através desta amostra, se a renda média dos funcionários deste setor é de pelo menos 2,3 s.m. ou não, ao nível de 5% de significância.

Respostas

1. (a) Sabemos que $N^{coroas} = 10 - N^{caras}$, e que tanto N^{caras} quanto N^{coroas} têm distribuição $Bin(10, 1/2)$. Denotando $N = N^{caras} - N^{coroas}$, temos que encontrar $P(|N| \leq 2)$:

$$\begin{aligned} P(|N| \leq 2) &= P(|10 - 2N^{coroas}| \leq 2) = P(4 \leq N^{coroas} \leq 6) \\ &= P(N^{coroas} = 4) + P(N^{coroas} = 5) + P(N^{coroas} = 6) \\ &= (1/2)^{10}(C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6) = (1/2)^{10}\left(\frac{10!}{4!6!} + \frac{10!}{5!5!} + \frac{10!}{6!4!}\right) \\ &= (1/2)^{10}(3 \times 7 \times 10 + 4 \times 7 \times 9 + 3 \times 7 \times 10) \\ &= 0,65625. \end{aligned}$$

(b) A probabilidade de que João nao possa estar presente no parto é

$$\begin{aligned} P(D^{med.} = 12 \text{ Julho}) &= P(D^{prev.} + (N \text{ dias}) = 12 \text{ Julho}) \\ &= P(N = -10) = P(N^{coroas} = 10) = (1/2)^{10}. \end{aligned}$$

2. (a) X: temperatura (em °C) do ambiente.

$$\begin{aligned} P(|X - 10| < 1) &= P(-1 < X - 10 < 1) = P(9 < X < 11) \\ &= \int_9^{11} \frac{3}{32}(-x^2 + 20x - 96)dx \\ &= \frac{3}{32}\left[-\frac{x^3}{3} + 10x^2 - 96x\right]_{x=9}^{11} \\ &= \frac{3}{32}\left[\left(-\frac{1331}{3} + 1210 - 1056\right) - \left(-\frac{729}{3} + 810 - 864\right)\right] \\ &= \frac{3}{32}\left[-\frac{602}{3} + 154 + 54\right] = \frac{3}{32} \times \frac{624 - 602}{3} = \frac{11}{16} = 0,6875. \end{aligned}$$

(b) Y: temperatura (em °F) do ambiente $\Rightarrow Y = 1,8X + 32$.
$\Rightarrow Var(Y) = Var(1,8X + 32) = 1,8^2 Var(X)$
$\Rightarrow DP(Y) = |1,8| DP(X) = 1,8\sqrt{E(X^2) - \{E(X)\}^2}$.

$$\begin{aligned} E(X) &= 10 \text{ (pois a distribuição é simétrica em torno de 10)}, \\ E(X^2) &= \int_8^{12} x^2 \frac{3}{32}(-x^2 + 20x - 96)dx = \frac{3}{32}\int_8^{12}(-x^4 + 20x^3 - 96x^2)dx \\ &= \frac{3}{32}\left[-\frac{x^5}{5} + 5x^4 - 32x^3\right]_{x=8}^{12} = \frac{3}{32}\left[-\frac{6912}{5} - \left(-\frac{12288}{5}\right)\right] \\ &= \frac{3 \times 5376}{32 \times 5} = \frac{16128}{160} = 100,8. \end{aligned}$$

Logo, $DP(Y) = 1,8\sqrt{100,8 - 10^2} = 1,8\sqrt{0,8} = 1,8 \times 0,8944 = 1,61°F$.

3. (a) $c = \left(c + \frac{2}{9}\right) \times \frac{1}{3}$, então $c = \frac{1}{9}$.

X \ Y	-1	0	1	$p(x)$
0	1/18	1/9	1/6	1/3
1	1/9	2/9	1/3	2/3
$p(x)$	1/6	1/3	1/2	1

(b)

$$E(XY) = -1 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad ; \quad E(X) = \frac{2}{3} \quad ; \quad E(Y) = \frac{1}{3} \quad ; \quad E(X^2) = \frac{2}{3};$$

$$Var(X) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} \quad ; \quad CV(X) = \frac{DP(X)}{E(X)} = \frac{\sqrt{2/9}}{2/3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7071;$$

$$E(XY) = \frac{2}{9} \quad ; \quad Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

4. (a) Neste caso, temos $\overline{X} \sim N\left(50\,;\,\frac{5^2}{10}\right)$. Então,

$$\begin{aligned} P(\text{Parada Desnecessária}) &= 1 - P(48 < \overline{X} < 52) \\ &= 1 - P\left(\frac{48-50}{5/\sqrt{10}} < \frac{\overline{X}-50}{5/\sqrt{10}} < \frac{52-50}{5/\sqrt{10}}\right) \\ &= 1 - P(-1,265 < Z < 1,265) = 2(1 - \Phi(1,265)) = 0,206. \end{aligned}$$

(b) Agora temos $\overline{X} \sim N\left(47\,;\,\frac{5^2}{10}\right)$. Então,

$$\begin{aligned} P(\text{Não detecção}) &= P(48 < \overline{X} < 52) \\ &= P\left(\frac{48-47}{5/\sqrt{10}} < \frac{\overline{X}-47}{5/\sqrt{10}} < \frac{52-47}{5/\sqrt{10}}\right) \\ &= P(0,632 < Z < 3,162) = \Phi(3,162) - \Phi(0,632) = 0,263. \end{aligned}$$

5. (a) $100(1-\alpha)\% = 95\% \Rightarrow 1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2};n-1} = t_{0,975;24} = 2,064.$

$$\begin{aligned} IC &= \left(2,1 - 2,064\sqrt{\frac{0,09}{25}}\,;\,2,1 + 2,064\sqrt{\frac{0,09}{25}}\right) \\ &= (2,1 - 0,12384\,;\,2,1 + 0,12384) \\ &= (1,97616\,;\,2,22384) \end{aligned}$$

(b) (1) $H_0 : \mu \geq 2,3$ (ou $H_0 : \mu = 2,3$)
$H_1 : \mu < 2,3.$

(2) $\alpha = 5\% = 0,05.$

(3) Estatística de teste: $T = \dfrac{\overline{X} - 2,3}{\sqrt{S^2/25}}.$

(4) Sob H_0, T tem distribuição t de Student com $25 - 1 = 24$ graus de liberdade.

(5) Região crítica: $R = (-\infty\,;\,-t_{1-\alpha;n-1}] = (-\infty\,;\,-t_{0,95;24}] = (-\infty\,;\,-1,711].$

(6) $t = \dfrac{2,1 - 2,3}{0,3/5} = \dfrac{-1}{0,3} = -3,33 \in R \Rightarrow$ Rejeitamos H_0.

OBS.: Os passos (3) - (6) também podem ser feitos da seguinte maneira:

(3') Estatística de teste: $\overline{X}$.

(4') Sob H_0, $\overline{X} \sim N(2,3\,;\,\sigma^2/25)$.

(5') Região crítica: $R = \left(-\infty\,;\;\mu_0 - t_{1-\alpha;n-1}\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right] = (-\infty\,;\,2,19734].$

(6') $\bar{x} = 2,1 \in R \Rightarrow$ Rejeitamos H_0.