UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Prova Final de Probabilidade e Estatística 28-11-2017

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

---

1. A distribuição do peso dos usuários de um elevador pode ser modelada por uma Normal com média 72kg e com desvio padrão 10kg. Suponha que cinco pessoas apareçam aleatoriamente para usar esse elevador.

   (a) Sabendo que o limite de peso recomendado para o elevador é de 400 kg, calcular a probabilidade de que o peso no elevador exceda esse limite.

   (b) Na construção de um novo elevador, qual deve ser o limite de carga para que se garanta, com 98% de chance, que a soma dos pesos de cinco pessoas dessa população de usuários não ultrapasse este limite?

   (c) Suponha agora que este elevador será usado para transportar carga de 50 pacotes. A distribuição do peso de cada pacote, sendo todos provenientes do mesmo fornecedor, não pode ser modelado pela Normal. Sabe-se que os pacotes têm em média 7,5 Kg e desvio padrão 2 kg. Calcular a probabilidade de que o peso no elevador exceda esse limite.

2. A trava se segurança de um aparelho industrial deve ser trocada com frequência, de modo a evitar a quebra devido ao desgaste. Estudos anteriores admitem que a vida útil dessa trava pode ser representada por uma variável aleatória contínua, assumindo valores entre 0 e 1 ano, com função de densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(1 - x^2), & \text{se } 0 < x \leqslant 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Calcule a probabilidade da vida útil ser superior a seis meses.

   (b) Determine a vida útil média.

   (c) Calcule o desvio padrão da vida útil do aparelho industrial.

3. Seja X uma variável aleatória com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, e seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória da variável X. Considere os seguintes dois estimadores da variância σ^2:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \quad \text{e} \quad \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

   em que $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Sabe-se que S^2 é um estimador não-viesado para σ^2, e que $\text{Var}(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

   (a) Calcule o víes de $\widehat{\sigma}^2$.

   (b) Compare os Erros Quadráticos Médios (EQM) dos estimadores S^2 e $\widehat{\sigma}^2$. Qual deles tem menor EQM?

4. Uma organização universitária deseja estimar a porcentagem de estudantes que são favoráveis a criação de um novo estatuto. Ela seleciona uma amostra de 200 estudantes, aleatoriamente, e constata que 120 são favoráveis a este novo estatuto.

   (a) Construir um intervalo de confiança para p, a verdadeira porcentagem de estudantes favoráveis na população, com nível de confiança de 98%.

   (b) Qual deverá ser o tamanho da amostra para se ter um erro de estimação máximo de 5% com probabilidade de 98%.

   (c) Testar a hipótese de p ser menor ou igual a 0,55 contra a alternativa de p ser maior que 0,55 ao nível de significância de 5%.

Boa Prova!

Solução

1. Sejam a v.a.X_i=Peso da pessoa i, que usa o elevador; $X_i \sim N(\mu = 72, \quad \sigma^2 = 10^2)$;
$X_T = X_1 + \cdots + X_5; \quad X_T \sim N(5 \times \mu = 360; 5 \times 10^2 = 500 \approx 22,36^2)$ e
a v.a.Y_i=Peso do pacote i; $Y_i \sim N(\mu = 7,5, \quad \sigma^2 = 2^2)$;
$Y_T = Y_1 + \cdots + Y_{50};$ Como são 50 pacotes, n grande, poderemos usar o TCL, então,
$Y_T \sim N(50 \times 7,5 = 375; \quad 50 \times 2^2 = 200 \approx 14,14^2)$.

   (a) $P(X_T > 400) = 1 - P(Z < \frac{400-360}{22,36}) = 1 - \Phi(1,79) = 1 - 0,9633 = 0,0327.$

   (b) $P(X_T < lim) = 0,98; \quad \frac{lim-360}{22,36} = 2,05; \quad lim = 405,84.$

   (c) $P(Y_T > 400) = 1 - P(Z < \frac{400-375}{14,14}) = 1 - \Phi(1,77) = 1 - 0,9616 = 0,0384.$

2. (a) $\Pr(X > 0,5) = \int_{1/2}^{1} \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{2}\left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8 \times 3}\right] = \frac{5}{16} = 0,3125.$

   (b) $\mathrm{E}(X) = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 x\frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0 + 0\right] = \frac{3}{8} = 0,375$ anos $(0,375 \times 12 = 4,5$ meses).

   (c) $\mathrm{E}(X^2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2\frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 0 + 0\right] = \frac{1}{5} = 0,2$ anos^2.
   $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{19}{320} = 0,059375$ anos^2.
   $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{0,059375} = 0,2436699$ anos.

3. (a) O víes do estimador $\widehat{\sigma}^2$ é definido como $B(\widehat{\sigma}^2) = \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) - \sigma^2$. O estimador $\widehat{\sigma}^2$ pode ser expresso em função do estimador S^2, ou seja, $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{n-1}{n}S^2$. Então, $\mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) = \dfrac{n-1}{n}\mathrm{E}(S^2) = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \implies B(\widehat{\sigma}^2) = \mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) - \sigma^2 = -\frac{1}{n}\sigma^2$.

   (b) O EQM do estimador $\widehat{\sigma}^2$ é $EQM(\hat{\sigma}^2) = Var(\hat{\sigma}^2) + B^2(\hat{\sigma}^2)$. Sabendo que $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{n-1}{n}S^2$ e que $\mathrm{Var}(S^2) = \dfrac{2\sigma^4}{n-1}$, temos que $\mathrm{Var}(\widehat{\sigma}^2) = \dfrac{(n-1)^2}{n^2}\dfrac{2\sigma^4}{n-1} = \dfrac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$. Então, $\mathrm{EQM}(\widehat{\sigma}^2) = \dfrac{2n-1}{n^2}\sigma^4$.
   O EQM do estimador S^2 é $\mathrm{EQM}(S^2) = \dfrac{2}{n-1}\sigma^4$, porque ele é não tendencioso. Não é difícil ver que, para todo $n > 1$
   $$\frac{2n-1}{n^2}\sigma^4 < \frac{2}{n-1}\sigma^4$$
   e podemos concluir que $\mathrm{EQM}(\hat{\sigma}^2) < EQM(S^2)$.

4. (a) Usando a amostra: $\hat{p} \ \pm \ 2,33\frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{200}} \ \rightarrow \ 0,6 \ \pm \ 0,0807 = [0,5193, 0,6807]$
   Conservativo: $0,6 \ \pm \ 2,33\frac{1}{\sqrt{200*4}} \rightarrow 0,6 \ \pm \ 0,0824 = [0,5176; 0,6824]$

   (b) $P(|\hat{p} - p| \leq 0,05) = 0,98 \ \rightarrow \ P(\frac{-0,05}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} < Z < \frac{0,05}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}) = 0,98 \ \rightarrow n = (\frac{2,33}{0,05})^2 \times 0,6 \times (1 - 0,6) \approx 522$

   (c) Usando $n = 200 \ \rightarrow$ p-valor$=P(\hat{p} > 0,60|H_0) = \ P(Z > \frac{0,60-0,55}{\sqrt{\frac{0,55*0,45}{200}}}) = P(Z > 1,4213) = 0,077$
   Logo, como p-valor é maior do que 0,05 H_0 não deve ser rejeitada.