UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos
Probabilidade e Estatística - Estatística

Prova Final 05-12-2013

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

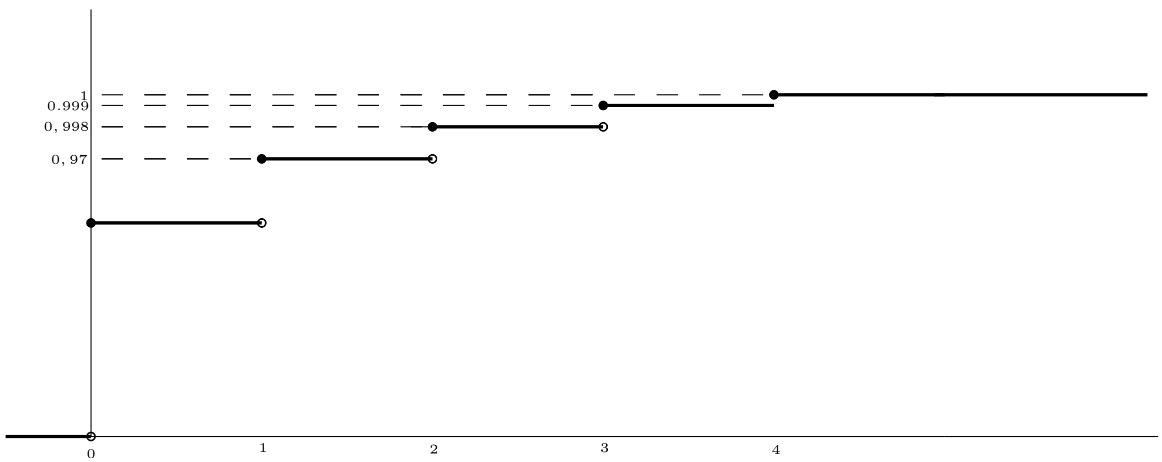
1. Retiram-se 4 cartas, ao acaso e com reposição, de um baralho de 52 cartas. Seja X a variável aleatória definida como o número de reis na amostra.

   (a) Obtenha a função de probabilidade de X e faça um gráfico da sua função de distribuição acumulada.

   (b) Obtenha a esperança e a variância de X.

   Solução.

   (a) Como temos reposição, segue que X pode ser visto como o número de sucessos (sortear um rei num baralho de 52 cartas) em 4 ensaios independentes e com mesma probabilidade de sucesso. Isto é, $X \sim$ Binomial$(4; 1/13)$ (probabilidade de sucesso é $4/52 = 1/13$). Obtemos $P(X = 0) \approx 0,73$, $P(X = 1) \approx 0,24$, $P(X = 2) \approx 0,03$, $P(X = 3) \approx 0,0017$ e $P(X = 4) \approx 3,5.10^{-5}$. Segue um gráfico da FDA (não está na escala).



   (b) X tendo distribuição binomial, temos E$X = 4/13 \approx 0,3$ e Var$X = 4/13 \times (1 - 1/13) \approx 0,28$.

2. Suponha que as notas obtidas pelos alunos num exame nacional sejam normalmente distribuídas com média 500 e desvio padrão 150.

   (a) Determine a porcentagem de alunos com notas superiores a 600.

   (b) Se as notas de cinco desses alunos forem sorteadas, qual a probabilidade de que ao menos duas sejam superiores a 600?

   Solução.

   (a) Seja X a v.a. representando a nota de um aluno no exame, isto é, $X \sim N(500, 150^2)$. A porcentagem de alunos com notas superiores a 600 é a probabilidade $P(X \geq 600) = 1 - \phi(100/150) = 1 - \phi(2/3) \approx 0,2514$.

   (b) A distribuição do número Y de alunos tendo nota superior a 600 sobre 5 sorteados é Binomial$(5, p)$ onde $p = \phi(2/3)$. Segue que a probabilidade pedida é $P(Y \geq 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 0) = 1 - 5p(1-p)^4 - (1-p)^5 \approx 0,367$.

3. Uma amostra de dez casais e seus respectivos salários anuais (em s.m.) foi colhida num certo bairro conforme vemos na tabela abaixo:

   Sabe-se que: $\sum x_i = 200$, $\sum y_i = 100$, $\sum x_i^2 = 4500$, $\sum y_i^2 = 1150$, $\sum x_i y_i = 2150$.

   (a) Calcule a média e o desvio padrão do salário anual dos homens.

Casal n^o	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Homem (X)	10	15	10	20	15	25	20	30	25	30
Mulher (Y)	5	5	10	5	10	10	15	10	15	15

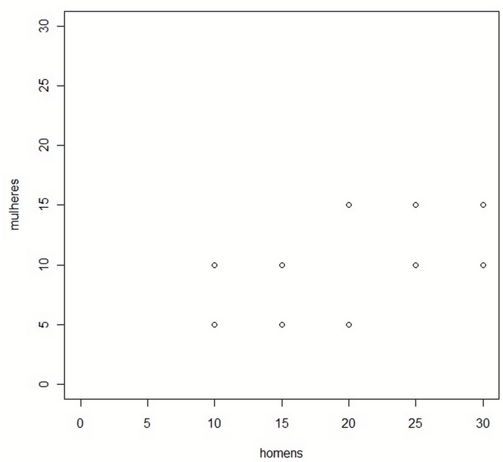
(b) Calcule o primeiro, segundo e terceiro quartis do salário anual das mulheres.

(c) Construa o diagrama de dispersão e encontre a correlação entre o salário anual dos homens e o das mulheres. O que os resultados indicam?

(a) $\bar{x} = \sum x_i/n = 200/10 = 20s.m.$ e $s_x^2 = \frac{\sum x^2 - n\bar{x}}{n-1} = \frac{4500-10(20^2)}{9} = 55,55$ Logo, $s_x = \sqrt{55,55} \approx 7,45$.

(b) Ordenando os dados, temos: 5, 5, 5, 10, 10, 10, 10, 15, 15, 15. O primeiro quartil fica na posição $(n+3)/4 = 13/4 = 3,25$, o segundo quartil fica na posição $(n+1)/2 = 11/2 = 5,5$ e o terceiro quartil fica na posição $(3n+1)/4 = 31/4 = 7,75$. Logo

$$\begin{aligned} Q1 &= 0,75(5) + 0,25(10) = 6,25, \\ Q2 &= (10+10)/2 = 10, \\ Q3 &= 0,25(10) + 0,75(15) = 13,75. \end{aligned}$$



(c)

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \frac{\sum(x_i y_i) - n\bar{x}\bar{y}}{n-1} = \frac{2150 - 10(20)(10)}{9} = 16,667 \\ s_x &= 7,45 \\ s_y^2 &= \frac{\sum y^2 - n\bar{y}}{n-1} = \frac{1150 - 10(10^2)}{9} = 16,667 \\ s_y &= \sqrt{16,667} = 4,08 \\ r_{xy} &= \frac{S_{xy}}{s_x s_y} = \frac{16,667}{7,45(4,08)} = 0,5483 \end{aligned}$$

Essa correlação indica uma relação linear positiva moderada entre o salário dos homens e suas respectivas mulheres.

4. Suponha X uma v.a. Normal com média μ e desvio padrão $\sigma = 5$. Deseja-se fazer um Teste de Hipóteses com H_0: $\mu = 10$ versus H_1: $\mu \neq 10$ baseado numa amostra de n=25 elementos.

(a) Fixado o nível de significância $\alpha = 0,05$, explicite a estatística de teste e o critério de decisão a serem usados.

(b) Determine a probabilidade do erro tipo II para $\mu = 9$;

(c) Se para esta amostra com 25 elementos foi observado $\bar{x}$=9,3, calcule o p-valor. Que decisão deve ser tomada neste caso?

(d) Repita o que foi pedido no item (a), supondo agora que σ é desconhecido.

Solução. Como X $\sim N(\mu,\ \sigma = 5)$ então $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1)$.

(a) A estatística do teste será $\bar{X}$. Também podería ser $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Como o teste é bilateral, $\alpha = 0,05, z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ a Região de Rejeição (RC) é composta de duas partes: $\frac{\bar{x}_{c1}-10}{1} = 1,96$ correspondendo a $\bar{x}_{c1} = 11,96$ e $\frac{\bar{x}_{c2}-10}{1} = -1,96$ correspondendo a $\bar{x}_{c2}$=8,04. Assim a RC, onde se rejeita a hipótese H_0, é a união dos intervalos: $\bar{X} < 8,04$ e $\bar{X} > 11,96$. Aceita-se H_0 se $8,04 < \bar{X} < 11,96$.

(b) P(erro II) = P($8,04 < \bar{X} < 11,96$) quando $\mu = 9$.
P(erro II) = $\Phi(\frac{11{,}96-9}{1}) - \Phi(\frac{8{,}04-9}{1}) \approx 0,83$.

(c) p-valor $= P(\bar{X} > 10,7) + P(\bar{X} < 9,3)$ quando $\mu = 10$.
p-valor $= 2 \times (1 - \Phi((10,7 - 10)/1)) \approx 0,484$.

(d) A estatística do teste será $T = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim$ t-Student com n-1=24 g.l.. Olhando na tabela da t-Student, $t_{1-\alpha/2;24} = 2,064$.
Assim, a decisão será de aceitar H_0 se $-2,064 < \frac{\bar{x}_{obs}-10}{s/\sqrt{n}} < 2,064$. Caso contrário, rejeita-se H_0.

Boa prova!