UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Segunda Avaliação de Probabilidade e Estatística 16-11-2017

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

---

1. Suponha que $X_i, i = 1, \ldots, 50$, sejam variáveis aleatórias independentes, cada uma delas tendo distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 0,03$. Faça $S = X_1 + \ldots + X_{50}$. *Observação: a soma de variáveis aleatórias de Poisson independentes tem distribuição de Poisson.*

   (a) Empregando o Teorema Central do Limite, calcule uma aproximação para $P(S \geq 3)$.

   (b) Calcule o valor exato dessa probabilidade.

   OBS: Aqui se trata de aproximar uma distribuição discreta por uma contínua. Então, da mesma forma como foi visto no caso da aproximação de Binomial por Normal, cabe usar uma correção de continuidade.

2. Os dados abaixo correspondem a notas de uma turma de Probest com 30 alunos:

68	47	87	65	97	49	65	70	73	81
85	77	83	56	63	79	82	84	69	70
61	73	30	81	67	76	58	53	71	82

   onde: $\sum_{i=1}^{30} x_i = 2102$ e $\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 152996$

   (a) Construa um gráfico ramo e folha, com os ramos: 3,4,5,...,9.

   (b) (i) Calcule a média e os quartis; (ii) Calcule a variância e o desvio padrão; (iii) Existe alguma nota fora do intervalo $\bar{x} \pm 2s$?

   (c) Construa um desenho esquemático (boxplot).

3. Deseja-se estimar a concentração de uma determinada substância indesejada em uma amostra de um produto químico. Devido a imprecisões do aparelho utilizado, que induzem erros de medição supostos normalmente distribuídos, são realizadas diversas repetições do experimento, implicando na obtenção das medidas:

$$8,80 \quad 10,98 \quad 11,48 \quad 13,42 \quad 9,61,$$

   expressas na unidade de ppm (partes por milhão). A fim de concatenar tais estimativas em somente uma, mais precisa, o pesquisador considera a média amostral como uma estimativa da concentração da substância indesejada, e para estudar a qualidade da estimação ele considera intervalos de confiança. Para isso, faça o que se pede abaixo:

   (a) Construa um intervalo de confiança de 95% para a média amostral supondo que $\sigma = 2$, ou seja, a incerteza introduzida pelo equipamento é conhecida.

   (b) Construa um intervalo de confiança de 95% para a média amostral, agora supondo σ desconhecido, ou seja, no caso em que a incerteza introduzida pelo equipamento de medição é desconhecida.

4. O consumo médio de gasolina em um certo tipo de automóvel é de 15 km/ℓ, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo em 25 desses veículos, escolhidos ao acaso, e constatou consumo médio de 14,3 km/ℓ. Admita que o consumo siga o modelo normal com variância igual a 9 (km/ℓ)^2. Considere nível de siginificância de 10% para os testes abaixo.

   (a) Teste a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15 km/ℓ contra a alternativa de ser igual a 14 km/ℓ.

   (b) Teste a afirmação da montadora de que a média de consumo é igual a 15 km/ℓ contra a alternativa de ser diferente de 15 km/ℓ.

Boa Prova!

Solução

1. Como $X_i \sim Pois(\lambda = 0,03)$, então $E(X_i) = 0,03$ e $Var(X_i) = 0,03$.
   Assim, $S = \sum X_i \sim Pois(50\lambda)$.
   Seja a variável aleatória contínua, $S_c \sim N(1,5; 1,5)$. Como n=50 é grande, pelo TCL, usaremos a S_c como aproximação da distribuição da Poissom pela Normal.

   (a)

   $$P(S \geq 3) = P(S_c \geq 2,5) = P\left(Z \geq \frac{2,5-1,5}{\sqrt{1,5}}\right) \approx P(Z \geq 0,8165) = 1 - \Phi(0,8165) = 1 - 0,7929 = 0,2071.$$

   (b) $S \sim Poi(50 \times \lambda) \sim Poi(1,5)$.

   $$P(S \geq 3) = 1 - P(S < 3) = 1 - (P(S=0) + P(S=1) + P(S=2)) =$$

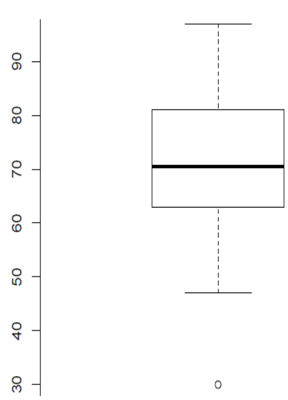
   $$= 1 - e^{-1,5}(1 + 1,5 + 1,5^2/2) = 1 - 0,8088 = 0,19115.$$

2. (a)

```
3 | 0
4 | 79
5 | 368
6 | 1355789
7 | 00133679
8 | 11223457
9 | 7
```

   (b) (i)$\bar{x} = \frac{2102}{30} = 70,07$
   (ii) $Pos(Q_2) = \frac{n+1}{2} = \frac{31}{2} = 15,5$. Assim, $Q_2 = 0,5x_{15} + 0,5x_{16} = 0,5 \times 70 + 0,5 \times 71 = 70,5$
   $Pos(Q_1) = \frac{n+3}{4} = \frac{33}{4} = 8,25$. Assim, $Q_1 = 0,75x_8 + 0,25x_9 = 0,75 \times 63 + 0,25 \times 65 = 63,5$
   $Pos(Q_3) = \frac{3n+1}{4} = \frac{91}{4} = 22,75$. Assim, $Q_3 = 0,25x_{22} + 0,75x_{23} = 0,25 \times 81 + 0,75 \times 81 = 81$
   (iii) $s^2 = \frac{152996 - \frac{(2102)^2}{30}}{29} \approx 197,1 \approx 14,04^2$. Então $\bar{x}+2s = 70,07+14,04 = 98,15$ e $\bar{x}-2s = 70,07-14,04 = 41,99$
   Somente a nota 30 está fora do intervalo $\bar{x} \pm 2s$.

   (c) $DIQ = Q_3 - Q_1 = 81 - 63,5 = 17,5$,
   $CI = Q_1 - 1,5DIQ = 63,5 - 1.5 \times 17,5 = 37,25$ e
   $CI = Q_1 - 1,5DIQ = 81 + 1.5 \times 17,5 = 107,25$



3. A partir dos dados calculamos $\bar{x} = 10,86$ e $s = 1,79$

   (a) Sendo conhecido o valor de σ e sendo o intervalo de confiança de 95%, temos que ele é dado por

$$\left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

   com $\alpha = 0,05$ e $n = 5$, lembrando que $z_{1-\alpha/2} = z_{0,975} = 1,96$ é o respectivo quantil da distribuição normal padrão. Dessa forma, temos que o intervalo de confiança pedido é $10{,}86 \pm 1,96 \times 2/\sqrt{5}$, o que resulta em $(9,10; 12,61)$.

   (b) Sendo σ desconhecido, agora o intervalo é da forma $\left(\bar{x} - t_{1-\alpha/2;\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} - t_{1-\alpha/2;\nu}\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, onde $t_{1-\alpha/2;\nu} = 2,776$ é o respectivo quantil da distribuição t com ν graus de liberdade, sendo $\nu = n - 1 = 4$, e $s = 1,79$. Dessa forma, temos que o intervalo de confiança pedido é $10{,}86 \pm 2,776 \times 1,79/\sqrt{5}$, o que resulta em $(8,64; 13,08)$.

4. (a) Teste unilateral. $\alpha = 0,10 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,90 \Rightarrow z_{0,90} = 1,28$.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu = 14 \end{cases} \qquad \text{RC} = \left\{\overline{x} :\ \overline{x} < 15 - 1,28 \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}\right\} = \{\overline{x} :\ \overline{x} < 14,232\}.$$

   Como $\overline{x} = 14,3 > 14,232$, então não se rejeita a hipótese de que o consumo médio seja de 15 km/ℓ.

   (b) Teste bilateral. $\alpha = 0,10 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,95 \Rightarrow z_{0,95} = 1,64$.

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{cases}$$

$$\text{RC} = \left\{\overline{x} :\ \overline{x} < 15 - 1,64 \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} \text{ ou } \overline{x} > 15 + 1,64 \times \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}\right\} = \{\overline{x} :\ \overline{x} < 14,02 \text{ ou } \overline{x} > 15,98\}.$$

   Como $14,02 < \overline{x} < 15,98$, então não se rejeita a hipótese de que o consumo médio seja de 15 km/ℓ.