Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ
$1^{\underline{a}}$ Prova de Estatística Unificada

Turma: Engenharia Data: 10/10/2011

---

1. Sejam A e B dois eventos associados a um experimento. Suponha que $P(A) = 0,4$ enquanto $P(A \cup B) = 0,7$. Seja $P(B) = p$.

   (a) Para que valor de p, A e B serão mutuamente exclusivos?

   (b) Para que valor de p, A e B serão independentes?

2. O número de pessoas que chegam a um determinado evento cultural é regido por um modelo de Poisson com média de 5 pessoas por minuto.

   (a) Qual a probabilidade de chegarem no máximo 2 pessoas em 1 minuto?

   (b) Qual a probabilidade de chegarem exatamente 3 pessoas em 2 minutos?

   Obs.: Para simplificar os seus cálculos, use nas contas os valores (aproximados) que constam na tabela abaixo:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e^{-x}	1	0,3678	0,1353	0,0497	0,0183	0,0067	0,0024	0,0009	0,0003	0,0001	$4,5 \times 10^{-5}$

3. Para que um satélite possa ser corretamente controlado, a distância entre ele e o alvo tem de ser menor que $6,6$ pés. Neste caso considera-se que houve um sucesso. Admitindo que o alvo está localizado na origem de um determinado eixo, a posição do satélite (em pés) ao longo desse eixo se comporta segundo uma distribuição Normal com média zero e desvio padrão igual a 4. Nessas condições:

   (a) Calcule a probabilidade de falha no controle do satélite.

   (b) Quando 5 satélites são lançados, qual a probabilidade de se obter exatamente 3 sucessos?

   Obs.: Para simplificar os seus cálculos, use apenas duas casas decimais nas probabilidades que foram calculados no item (a).

4. Sejam as variáveis aleatórias X: *número de acidentes durante a noite em determinada avenida* e Y tal que, $Y = 0$, se não chove nesta noite; e $Y = 1$, se chove nesta noite. Não há registros de mais de 3 acidentes ocorrendo em apenas uma noite. A função de probabilidade conjunta de (X, Y) é dada na tabela a seguir:

Y \ X	0	1	2	3
0	0,15	0,10	0,10	0,05
1	0,20	0,15	0,15	0,10

   (a) Determine a probabilidade de ocorrência de exatamente 2 acidentes nesta avenida amanhã à noite, supondo que choverá nesta mesma noite.

   (b) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Justifique.

5. Uma grande loja de produtos eletrônicos recebe toda semana de uma indústria fornecedora um lote de 2500 determinadas peças para revenda. É sabido que 10% das peças produzidas pela indústria fornecedora vêm com pequenos defeitos. Para cada peça defeituosa encontrada no lote, a loja recebe $R\$ \ 0,20$ de indenização do forncecedor.

   (a) Quanto se espera que a loja receba de indenização em 100 semanas?

   (b) Qual a probabilidade de que a indenização recebida pela loja neste mesmo período de tempo seja maior que $R\$ \ 4.970,00$?

Respostas

1. Considerando a igualdade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   (a) Se A e B são mutuamente exclusivos então $P(A \cap B) = 0$. Logo,
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 \quad \Rightarrow \quad p = P(B) = P(A \cup B) - P(A) = 0,7 - 0,4 = 0,3$$
   (b) Agora, se A e B são independentes então $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Logo,
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \quad \Rightarrow \quad p(1-0,4) = 0,7 - 0,4 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{0,3}{0,6} = 0,5.$$

2. (a) *Seja X o número de pessoas que chegam ao evento por minuto. Então $X \sim Poi(5)$.*
   $$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= p(0) + p(1) + p(2) \\ &= \frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!} \\ &= 0,0067 + 0,0337 + 0,0842 \\ &= 0,1246. \end{aligned}$$
   (b) *Seja Y o número de pessoas que chegam ao evento em 2 minutos. Então $Y \sim Poi(10)$.*
   $$P(Y = 3) = p_Y(3) = \frac{e^{-10}10^3}{3!} = \frac{4,5 \times 10^{-2}}{6} = 0,0075.$$

3. Seja a variável aleatória X: "posição do satélite lançado em relação ao eixo", segundo enunciados $X \sim N(0,4)$.
   (a) $P(|X| > 6,6) = P\left(|Z| > \dfrac{6,6}{4}\right) = P(|Z| > 1,65) = 2(1 - 0,95) = 0,10.$
   (b) Seja a variável aleatória Y: "número de sucessos em 5 lançamentos independentes de satélites." Como $P(\text{sucesso}) = 1 - P(\text{fracasso}) = 1 - 0,1 = 0,9$, temos que $Y \sim \text{Bin}(5;\, 0,9)$. Portanto,
   $$P(Y = 3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} 0,9^3 0,1^2 = 0,0729.$$

4. (a) $P(X = 2|Y = 1) = \dfrac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = \dfrac{0,15}{0,20 + 0,15 + 0,15 + 0,10} = \dfrac{0,15}{0,60} = 0,25.$
   (b) Não são independentes, pois há ao menos um par (x,y) no qual $p(x,y) \neq p_X(x)p_Y(y)$. Por exemplo, $p(0,0) = 0,15 \neq 0,14 = p_X(0)p_Y(0)$.

5. (a) *Seja X_i o número de peças com defeito em um lote. Assim, $X_i \sim Bin(2500; 0,10)$, para $i = 1, 2, \ldots, 100$, e, portanto,*
   $$\begin{aligned} E(X_i) &= 2500 \times 0,10 = 250 \\ Var(X_i) &= 2500 \times 0,10 \times 0,90 = 225. \end{aligned}$$
   Seja Y_i o valor da indenização por lote (em reais). Então $Y_i = 0,2\,X_i$, para $i = 1, 2, \ldots, 100$, e, portanto,
   $$\begin{aligned} E(Y_i) &= 0,2E(X_i) \\ &= 0,2 \times 250 = 50 \\ Var(Y_i) &= 0,2^2\,Var(X_i) \\ &= 0,04 \times 225 = 9. \end{aligned}$$

Seja $S_{100} = Y_1 + \ldots + Y_{100}$ *o valor da indenização em 100 semanas. Utilizando as propriedades da esperança,*

$$\begin{aligned} E(S_{100}) &= E(Y_1 + \ldots + Y_{100}) \\ &= E(Y_1) + \ldots + E(Y_{100}) \\ &= 100 \times 50 = 5000. \end{aligned}$$

Logo, o valor esperado é $R\$ \, 5.000,00$.

(b) *Pelo Teorema Central do Limite,* $S_{100} \dot{\sim} N(5000,\, 900)$. *Assim,*

$$\begin{aligned} P(S_{100} > 4970) &= P\left(Z > \frac{4970 - 5000}{30}\right) \\ &= P(Z > -1) \\ &= 1 - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) = 0,8413. \end{aligned}$$