UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística **07-04-2019**

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

Q1) Em um país hipotético, 60% dos eleitores não possuem preferência partidária definida, 20% dos eleitores apoiam partidos de oposição e 20% apoiam partidos da situação. Admita que:

- Há **independência** entre ter ou não preferência partidária definida e aprovar ou não o governo atual;
- Entre os eleitores que apoiam partidos de oposição, todos desaprovam o governo;
- Entre os eleitores que apoiam partidos da situação, 75% aprovam o governo.

(a) Qual é a proporção dos eleitores que aprovam o governo?

(b) Dado que um eleitor aprova o governo, qual é a probabilidade condicional: De que ele não tenha preferência partidária definida? De que apoie um partido de oposição? De que apoie um partido da situação?

(c) Dado que um eleitor não aprova o governo, qual é a probabilidade condicional: De que não tenha preferência partidária definida? De que apoie um partido de oposição? De que apoie um partido da situação?

Q2) Suponha que um livro-texto de 400 páginas apresente um total de 40 erros. Suponha também que os erros estão distribuidos aleatoriamente ao longo do texto. Apresente para cada item uma variável aleatória e um modelo probabilístico adequado para ela. Observe que nos itens (a), (b) e (c) você está modelando uma contagem de eventos em um espaço fixo definido (use Poisson). Calcule a probabilidade de que:

(a) Numa página, aleatoriamente selecionada, não haja erro algum;

(b) Um capítulo de 20 páginas apresente 2 ou mais erros;

(c) Um capítulo de 50 páginas apresente exatamente 3 erros;

(d) Num grupo de 5 capítulos, todos de 20 páginas, exatamente 3 capítulos apresentem 2 ou mais erros.

Q3) O comprimento das peças produzidas por uma máquina pode ser tratado como uma variável aleatória Normal com valor esperado μ (mm) e variância σ^2 (mm^2). Uma peça pode ser considerada defeituosa se o seu comprimento diferir do valor esperado mais do que σ. Sabe-se que 50% das peças produzidas têm comprimento inferior a 2,5 mm e 47,5% das peças produzidas têm comprimento entre 2,5 mm e 3,42 mm.

(a) Calcule μ e σ.

(b) Determine a probabilidade de que uma peça não seja defeituosa.

(c) Calcule DIQ, distância interquartil da v.a. comprimento das peças.

Q4) Dizemos que a média de uma característica de interesse de um processo em uma linha de produção está "em controle" se a média aritmética de n medições desta característica cai entre os limites inferior e superior pré-estabelecidos pelo fabricante. Caso contrário dizemos que está "fora de controle". Desejamos estudar o processo de produção de filamentos de lâmpadas em uma linha de produção através de suas espessuras. Suponha que as espessuras na linha de produção possuam uma média de 148 mícrons e desvio-padrão de 15 mícrons. Foi obtida uma amostra com 25 medições dessas espessuras, e admita que os limites inferior e superior de controle são iguais a, respectivamente, 142 e 156 mícrons.

(a) Qual a probabilidade do processo estar fora de controle? Que suposições foram utilizadas?

(b) Se a probabilidade do processo estar em controle fosse igual a $0,95$, quais seriam os novos limites superior e inferior de controle supondo que são simétricos em torno da média do processo?

Observação:
Admita que n=25 pode ser considerado suficientemente grande para que se possa usar o Teorema Central do Limite.

Boa Prova!

Q1) Sejam A1 = "Não tem preferência partidária definida", A2 = "Apoia um partido de oposição", A3 = "Apoia um partido da situação" e B = "Aprova o governo". Do enunciado, temos P(A1) = 0,6, P(A2) = 0,2 e P(A3) = 0,2. Além disso: A1 e B são independentes, A2 e B são mutuamente exclusivos e P(B|A3) = 0,75.

(a) A1 e B independentes $\Longrightarrow$ P(B|A1) = P(B).
A2 e B mutuamente exclusivos $\Longrightarrow$ P(B|A2) = 0.
Por outro lado, pelo Teorema da Probabilidade Total,
P(B) = P(A1)P(B|A1)+P(A2)P(B|A2)+P(A3)P(B|A3) = 0,6 P(B) + 0,2 x 0 + 0,2 x 0,75.
Daí decorre que: $P(B) = \frac{0{,}15}{1-0{,}6} = 0,375$. Ou seja, 37,5% dos eleitores aprovam o governo.

(b) A1 e B independentes $\Longrightarrow$ P(A1|B) = P(A1) = 0,6.
A2 e B mutuamente exclusivos $\Longrightarrow$ P(A2|B) = 0.
Além disso, pelo Teorema de Bayes: P(A3|B)$=\frac{P(B|A3)P(A3)}{P(B)} = \frac{0{,}75\times0{,}2}{0{,}375} = 0,4$.
Como era esperado: P(A1|B)+ P(A2|B)+ P(A3|B) = 1.
Ou seja, entre os que aprovam o governo: 60% não tem preferência partidária definida, 0% apoiam um partido de oposição e 40% apoiam um partido da situação.

(c) A1 e B^C independentes $\Longrightarrow$ P(A1|B^C) = P(A1) = 0,6.
$A2 \subset B^C \Longrightarrow P(A2|B^C) = \frac{P(A2)}{1-P(B)} = \frac{0{,}2}{1-0{,}375} = 0,32$
Além disso, pelo Teorema de Bayes: $P(A3|B^C) = \frac{P(B^C|A3)P(A3)}{P(B^C)} = \frac{(1-0{,}75)\times0{,}2}{1-0{,}375} = 0,08$.
Como era esperado: P(A1|B^C)+ P(A2|B^C)+ P(A3|B^C) = 1.
Ou seja, entre os que desaprovam o governo: 60% não tem preferência partidária definida, 32% apoiam um partido de oposição e 8% apoiam um partido da situação.

Q2) (a) Seja X_a= Número de erros em uma página. X_a ~Poisson($\lambda = 0,1$). Então $P(X_a = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 1,2,3,\dots$ $P(X_a = 0) = e^{-0,1} = 0,9048$

(b) Seja X_b= Número de erros no capítulo de 20 páginas. X_b ~Poisson($\lambda = 2$).
Então $P(X_b = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 1,2,3,\dots$
$P(X_b \geq 2) = 1 - P(X_b = 0) - P(X_b = 1) = 1 - 3e^{-2} = 0,5940 \approx 0,59$

(c) Seja X_c= Número de erros no capítulo de 50 páginas. X_c ~Poisson($\lambda = 5$).
Então $P(X_b = 3) = \frac{e^{-5}(5)^3}{3!} = 0,1404 \approx 0,14$

(d) Seja X_d= Número de capítulos, todos de 20 páginas, com 2 ou mais erros entre os 5 capítulos.
$X_d \sim Bin(n = 5,\ p = 0,59)$
$P(X_d = 3) = 10 \times 0,59^3 \times 0,41^2 = 0,3452$.

Q3) Seja X a v.a. que mede o comprimento das peças produzidas. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

(a) Temos que:
$P(X < 2,5) = 0,5.\ \ Assim, P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2{,}5-\mu}{\sigma}) = 0,5$. Então, $\frac{2{,}5-\mu}{\sigma} = 0 \rightarrow \mu = 2,5$ mm
$P(2,5 < X < 3,42) = 0,475 = P(0 < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3{,}42-2{,}5}{\sigma}) = 0,475$
$P(0 < Z < \frac{0{,}92}{\sigma}) = 0,475$. Assim, $\frac{0{,}92}{\sigma} = 1,96 \rightarrow \sigma = 0,47$ mm.

(b) $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0,6827$

(c) $DIQ = Q_3 - Q_1$. Usando a tabela para calcular: $\Phi(\frac{Q_1-\mu}{\sigma}) = 0,25 \quad e \quad \Phi(\frac{Q_3-\mu}{\sigma}) = 0,75$, obtemos $\frac{Q_1-2{,}5}{0{,}47} = \Phi^{-1}(0,25) = -0,67 \ \ e \ \ \frac{Q_3-2{,}5}{0{,}47} = \Phi^{-1}(0,75) = 0,67$.
Assim, $Q_1 = -0,67 \times 0,47 + 2,5 = 2,185mm$; $Q_3 = 0,67 \times 0,47 + 2,5 = 2,815mm \ \ e \ \ DIQ = 0,63mm$.

Q4) (a) Para o processo estar fora de controle temos que ter $\bar{X} < 142,12$ ou $\bar{X} > 156,19$. Assim deseja-se obter: $P(\bar{X} < 142 \text{ ou } \bar{X} > 156)$.

Utilizando o TCL obtemos, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$. Então, $\bar{X} \sim \mathcal{N}(148, 9)$, assim:

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 142 \text{ ou } \bar{X} > 156) &= P(\bar{X} < 142) + P(\bar{X} > 156) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 148}{3} < \frac{142 - 148}{3}\right) + P\left(\frac{\bar{X} - 148}{3} > \frac{156 - 148}{3}\right) \\ &= P(Z < -2,00) + P(Z > 2,67) = \Phi(-2) + (1 - \Phi(2,67) \\ &= (1 - 0,9772) + (1 - 0,9962) = 0,0266 \end{aligned}$$

É necessário supor que as medições das espessuras são independentes entre si para utilizar o TCL.

(b) Sejam μ, σ a média e o desvio-padrão do processo e n o tamanho da amostra. Como os limites são simétricos em torno da média temos:

$$\begin{aligned} \text{Limite inferior}(LI) &= \mu - d \\ \text{Limite Superior}(LS) &= \mu + d \end{aligned}$$

onde d é uma constante.

Segue que:

$$\begin{aligned} 0,95 &= P(LI \leq \bar{X} \leq LS) \\ &= P\left(\frac{LI - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{LS - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= P\left(-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi(\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}) - \Phi(-\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}) \\ &= 2\Phi(\frac{d}{\sigma/\sqrt{n}}) - 1 \end{aligned}$$

Sabemos que $\mu = 148$, $\sigma = 3$ e $n = 25$, assim:

$$2\Phi(\frac{d}{3}) - 1 = 0,95 \Rightarrow d = 3 \times \Phi^{-1}(0,975) = 5,88$$

Assim os limites de controle seriam iguais a:

$$\begin{aligned} LS &= 148 + 5,88 = 153,88 \text{ mícrones} \\ LI &= 148 - 5,88 = 142,12 \text{ mícrones} \end{aligned}$$