UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Avaliação de Probabilidade e Estatística **25-09-2018**
Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa.
Resolver as questões nos espaços apropriados.

Q1) Um engenheiro apresentou orçamentos separados para a execução de uma obra num prédio em construção. O primeiro orçamento foi feito para a parte elétrica do prédio e o segundo orçamento foi feito levando em consideração a parte de encanamento do edifício. O engenheiro acha que a probabilidade de ganhar a concorrência da parte elétrica é de $1/2$. Caso ele ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de $3/4$; caso contrário, essa probabilidade é de $1/3$. O engenheiro gostaria de saber qual a probabilidade:

(a) de ganhar o contrato referente à parte de encanamento;
(b) de ganhar os dois contratos;
(c) de ganhar apenas um contrato;
(d) condicional de ganhar o contrato da parte elétrica, dado que já ganhou o da parte de encanamento.

Q2) Suponha que o número de candidatos a participar em determinado curso seja uma v.a. cuja distribuição é uma Poisson com média de 4 inscrições. Se não houver um mínimo de 3 interessados o curso não será oferecido. Por outro lado, na sala há somente 5 computadores e, nas aulas, cada computador será utilizado por apenas um aluno. Calcule a probabilidade:

(a) de que haja mais interessados do que vagas;
(b) de que o curso não seja oferecido por escassez de inscrições (arredonde o resultado para 2 casas decimais);
(c) condicional de que todos os interessados consigam se inscrever dado que foi atingido o número mínimo de inscrições.
(d) de num ano em que houver 6 tentativas independentes de se oferecer este curso, em exatamente 2 delas o curso seja cancelado por escassez de inscrições.

Q3) O Chile encontra-se em uma das regiões do mundo que apresentam os maiores índices de ocorrência de terremotos. Suponha que o intervalo de tempo T entre a ocorrência de dois terremotos sucessivos possa ser modelado por uma variável aleatória exponencial com média desconhecida $1/\lambda$, em meses. Com base em dados históricos sabe-se que a probabilidade de que o intervalo de tempo entre dois terremotos exceda um ano é de $0,001\%$.

(a) Usando a informação contida nos dados históricos, calcule o valor de λ e em seguida escreva a expressão matemática da função densidade de probabilidade da variável aleatória T.
(b) Determine o número médio de terremotos no Chile durante um período de 6 meses e em seguida calcule a probabilidade de que nesse período de tempo ocorram no máximo dois terremotos.
(c) Um terremoto é considerado extremo se sua magnitude na escala Richter for superior a 10. Admitindo que a magnitude dos terremotos no Chile, na escala Richter, seja distribuída conforme uma normal de média $6,5$ e desvio padrão 1, determine a probabilidade de um terremoto ser considerado extremo.

Q4) Foi feito o loteamento de uma área rural em terrenos retangulares. Para cada terreno, seu comprimento e sua largura, ambos em metros, podem ser iguais a 10m, 20m ou 30m. Para simplificar, vamos trabalhar em decâmetros (simbolicamente, dam), lembrando que 1 dam = 10 m. Assim, tanto o comprimento X como a largura Y de um terreno sorteado ao acaso, podem ser iguais a 1, 2 ou 3. A tabela a seguir fornece (apenas parcialmente) a distribuição conjunta de X e Y, variáveis aleatórias supostas independentes:

	Y			
X	1	2	3	p(x)
1	0,35		0,14	
2				0,20
3	0,05			
p(y)		0,30		

Considere as v.a.'s V = 2X + 2Y = perímetro do terreno e W = XY = área do terreno (em dam^2).
Nessas condições, calcule:

(a) o valor de cada probabilidade, conjunta ou marginal, omitido na tabela acima.
(b) a probabilidade condicional de que a área seja igual a 4 dam^2, dado que o perímetro é igual a 8 dam.
(c) a média e a variância da área do terreno nesse loteamento.

Boa Prova!

Solução

Q1) Sejam os eventos
A: ganhar a concorrência da parte elétrica
B: ganhar a concorrência da parte de encanamento

A partir das informações do problema, temos: $P(A) = 1/2; \quad P(B|A) = 3/4 \ \ e \ \ P(B|A^c) = 1/3$

(a) Com isso, pelo teorema da Probabilidade Total,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c) = (3/4)(1/2) + (1/3)(1/2) = 13/24$$

(b) $P(A \bigcap B) = P(A) \times P(B|A) = 1/2 \times 3/4 = 3/8 = 0,375$

(c) $P(A \bigcap B^c) \bigcup P(A^c \bigcap B)) = P(A \bigcap B^c) + P(A^c \bigcap B) = P(A)P(B^c|A) + P(A^c)P(B|A^c) = (1/2)(1/4) + (1/2)(1/3) = 7/24 \approx 0,292$

(d) $P(A|B) = \frac{P(A \bigcap B)}{P(B)} = \frac{3/8}{13/24} = 9/13 = 0,692$

Q2) Seja X= Número de inscritos. X$\sim$Poisson($\lambda = 4$). Então $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(a) P(mais interessados do que vagas) =
P(X$\geq$ 6) $= 1 - \sum_{i=0}^{5} p(i) = 1 - e^{-4}(1 + 4 + 4^2/2! + 4^3/3! + 4^4/4! + 4^5/5!)$ = 0,2149

(b) P(curso não seja oferecido por escassez de inscrições) =
P(X$\leq$ 2) $= \sum_{i=0}^{2} p(i) = e^{-4}(1 + 4 + 4^2/2!)$ = 13 e^{-4} = 0,2381 $\approx$ 0,24

(c) P(todos os interessados consigam se inscrever | foi atingido o número mínimo de inscrições) =
$P(X \leq 5 \mid X \geq 3) = \frac{P(3 \leq X \leq 5)}{P(X \geq 3)} = \frac{e^{-4}(4^3/3! + 4^4/4! + 4^5/5!)}{1 - e^{-4}(1 + 4 + 4^2/2!)} = \frac{0,5470}{0,7619}$ = 0,7179

(d) Seja Y=Número de cursos realizados entre as 6 tentativas. Y $\sim$ Binom(n=6, p=0,24)
P(Y=2) = $15 \times 0,24^2 \times 0,76^4 = 0,2882$.

Q3) (a) Temos que $10^{-5} = P(T > 12) = e^{-12\lambda}$ e daí segue que $\lambda = log_e(10^5)/12 \approx 0,9594$. Logo a função densidade de probabilidade f_T da variável aleatória T é dada por

$$f_T(f) = \begin{cases} 0,9594e^{-0,9594t}, \text{ se } t \geq 0 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

(b) Seja X a variável aleatória representando o número de terremotos no Chile durante um período de 6 meses. Temos que $X \sim$ Poisson$(6 \times 0,9594)$ de modo que $E(X) = 6 \times 0,9594 \approx 5,76$ e

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= e^{-5,76} + e^{-5,76}(5,76) + e^{-5,76}\frac{(5,76)^2}{2} \\ &= 0,0736. \end{aligned}$$

(c) Se $Y \sim N(6,5; 1)$, então queremos calcular $P(Y > 10)$. Se $Z \sim N(0, 1)$, então temos

$$P(Y > 10) = P(Z > (10 - 6,5)) = 1 - \Phi(3,5) = 1 - 0,9998 = 0,0002.$$

Q4) (a) Devido à independência, P(X=2, Y=2) = P(X=2) P(Y=2) = 0,20 x 0,30 = 0,06.
Fazendo P(X=1) = a, pela independência, temos P(X=1, Y=2) = 0,3a.
Somando ao longo da linha X =1, temos: 0,35 + 0,3a + 0,14 = a $\Longrightarrow$ a = 0,7 = P(X=1).
Logo, P(X=3) = 1 − P(X=1) − P(X=2) = 1 − 0,7 − 0,2 = 0,1.
Fazendo P(Y=1) = b, pela independência, temos P(X=2, Y=1) = 0,2b.
Somando ao longo da coluna Y =1, temos: 0,35 + 0,2b + 0,05 = b $\Longrightarrow$ b = 0,5 = P(Y=1).
Logo, P(Y=3) = 1 − P(Y=1) − P(Y=2) = 1 − 0,5 − 0,3 = 0,2.
Agora que já temos as marginais, basta usar a independência:
P(X=1,Y=2) = 0,7 x 0,3 = 0,21; P(X=2,Y=1) = 0,2 x 0,5 = 0,10; P(X=2,Y=3) = 0,2 x 0,2 = 0,04;
P(X=3,Y=2) = 0,1 x 0,3 = 0,03;P(X=3,Y=3) = 0,1 x 0,2 = 0,02.

	Y			
X	1	2	3	p(x)
1	0,35	0,3a=0,21	0,14	a=0,70
2	0,2b=0,1	0,06	0,04	0,20
3	0,05	0,03	0,02	0,10
p(y)	b= 0,50	0,30	0,20	1,00

(b) $P(W = 4|V = 8) = \frac{P(V=8,W=4)}{P(V=8)} = \frac{P(2X+2Y=8,XY=4)}{P(2X+2Y=8)} = \frac{P(X=2,Y=2)}{P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=2)+P(X=3,Y=1)} =$
$= \frac{0{,}06}{0{,}14+0{,}06+0{,}05} = 0,24.$

(c) Inicialmente, calculemos $E(X), E(X^2), E(Y)\ e\ E(Y^2)$.
$E(X) = 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) = 1 \times 0,7 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,1 = 1,4\ dam$
$E(X^2) = 1^2P(X = 1) + 2^2P(X = 2) + 3^2P(X = 3) = 1 \times 0,7 + 4 \times 0,2 + 9 \times 0,1 = 2,4\ dam^2$
$E(Y) = 1P(Y = 1) + 2P(Y = 2) + 3P(Y = 3) = 1 \times 0,5 + 2 \times 0,3 + 3 \times 0,2 = 1,7\ dam$
$E(Y^2) = 1^2P(Y = 1) + 2^2P(Y = 2) + 3^2P(Y = 3) = 1 \times 0,5 + 4 \times 0,3 + 9 \times 0,2 = 3,5\ dam^2$

Já que X e Y são v.a.'s independentes, $E(XY) = E(X)E(Y)$. Então:
$E(W) = E(XY) = E(X)E(Y) = 1,4 \times 1,7 = 2,38\ dam^2$.

Já que X^2 e Y^2 também são v.a.'s independentes, $E[X^2Y^2] = E(X^2)E(Y^2)$. Então:
$Var(W) = Var(XY) = E[X^2Y^2] - [E(XY)]^2 = E(X^2)E(Y^2) - 2,38^2 =$
$= 2,4 \times 3,5 - 2,38^2 = 2,7356\ dam^4$.