UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Primeira Prova de Probabilidade e Estatística **07-05-2015**

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

1. Sabe-se que 2/3 dos minérios de uma pequena região encontram-se em localidades de difícil acesso. Nas localidades mais acessíveis (que não são de difícil acesso), apenas 10% dos minérios tem valor comercial. Nas localidades de difícil acesso, pesquisadores estimam que 20% dos minérios tenham valor de comércio.

   (a) Qual é o percentual de minérios com algum valor comercial em toda a região, considerando como correta a estimativa dos pesquisadores?

   (b) Qual é a probabilidade de que um minério sorteado ao acaso tenha vindo de uma localidade de difícil acesso dado que é um minério com valor comercial?

   (c) Desconsiderando a estimativa dos pesquisadores, qual deve ser a **real** proporção de minérios com valor comercial nas localidades de difícil acesso para que a dificuldade de acesso e o valor comercial do minério sejam independentes do ponto de vista probabilístico?

2. Em um pequeno restaurante gourmet existem 4 mesas para os seus clientes. Com base no que se vem observando, a gerência sabe que, todos os dias, as 4 mesas serão reservadas e que a chance de comparecimento de alguém que tenha reservado uma mesa é sempre igual a uma mesma constante p. O comparecimento de qualquer cliente é independente do comparecimento dos demais. A distribuição acumulada de X, número de clientes com reserva que comparecem, é:

valores de X	$X < 0$	$0 \leq X < 1$	$1 \leq X < 2$	$2 \leq X < 3$	$3 \leq X < 4$	$X \geq 4$
F(x)	0	0,0016	0,0272	0,1808	0,5904	1

   (a) Ache a função de probabilidade de X, E(X) e Var(X).

   (b) Qual o valor de p?

   (c) Qual a probabilidade de que, durante os 3 dias de um fim de semana de trabalho, em exatamente 2 desses dias todos os clientes que fizeram reservas compareçam?

3. Estudos mostram que em períodos críticos, o número de casos de dengue notificados em um determinado posto de saúde segue uma distribuição de Poisson. A cada semana, em média, 3 casos são notificados.

   (a) Qual é a probabilidade de que o intervalo de tempo entre duas notificações consecutivas seja maior que dois dias?

   (b) Após uma notificação no início de uma semana, exatamente 2 dias se passaram sem nenhum outro caso ser notificado. Qual é a probabilidade de que não haja casos notificados nesta semana?

4. Duas roletas idênticas, que podem resultar nos números 1, 2 ou 3 com igual probabilidade, serão colocadas para rodar simultaneamente. Nesse contexto, defina as seguintes variáveis:
   X = Menor número observado entre os resultados das duas roletas
   Y = Maior número observado entre os resultados das duas roletas

   (a) Construa a tabela da função de probabilidade conjunta de X e Y.

   (b) Obtenha a distribuição condicional de Y dado que X=2.

   (c) Calcule a Variância de $Y - X$.

Boa prova!

Soluções

1. (a) D: Minério vem de uma região de difícil acesso
   V: Minério tem valor de comércio

$$P(V \mid D) = 0,2, \quad P(V \mid D^c) = 0,1, \quad P(D) = 2/3$$

$$P(V) = P(V \mid D^c)P(D^c) + P(V \mid D)P(D) = 0,1 \times \frac{1}{3} + 0,2 \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

   (b)

$$P(D \mid V) = \frac{P(V \mid D)P(D)}{P(V)} = \frac{0,2 \times 2/3}{1/6} = 0,8$$

   (c) Devemos ter $P(V \mid D) = P(V \mid D^c) = 0,1$, porque dessa forma não importa se D ocorreu ou não, isso não vai alterar a chance de V ocorrer. Note que não podemos usar $P(V) = \frac{1}{6}$ como no item (a) porque esse valor foi obtido sem supor independência entre D e V.

2. (a) p(x)=F(x)-F(x-1). Assim,

x	0	1	2	3	4
p(x)	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

   $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i \times p(x_i) = np = 3,2$
   $Var(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \times p(x_i) - (E(X))^2 = np(1-p) = 0,64$

   (b) X $\sim$ Bin(n, p)
   $P(X = 0) = p(0) = (1-p)^4 = 0,0016$. Assm, $1 - p = \sqrt[4]{0,0016} = 0,2$. Então $p = 0,8$

   (c) Seja Y= Número de dias, entre os 3, em que todos os clientes que fizeram reservas comparecem.
   Y $\sim$ Bin(n=3, p=0,4096)

$$P(Y = 2) = 3 \times 0,4096^2 \times 0,5904 = 0,2972$$

3. (a) Seja X o número de casos notificados por semana. Assim, $X \sim Poi(3)$. Defina Y como sendo o número de casos notificados por dia. Assim, $Y \sim Poi(3/7)$. Agora defina T como sendo o tempo (em dias) entre duas notificações consecutivas. Logo, $T \sim Exp(3/7)$. Pode-se agora calcular

$$P(T > 2) = \int_2^\infty \frac{3}{7} e^{-\frac{3}{7}t} dt = -e^{-\frac{3}{7}t}\Big|_2^\infty = e^{-\frac{3\times 2}{7}} = 0,4244.$$

   (b) Pela propriedade de "falta de memória" da distribuição Exponencial, sabemos que

$$P(T > 7 \mid T > 2) = P(T > 5) = \int_5^\infty \frac{3}{7} e^{-\frac{3}{7}t} dt = -e^{-\frac{3}{7}t}\Big|_5^\infty = e^{-\frac{3\times 5}{7}} = 0,1173.$$

4. .

(a) .

X	Y: 1	2	3	$P(X)$
1	1/9	2/9	2/9	5/9
2	0	1/9	2/9	3/9
3	0	0	1/9	1/9
P(Y)	1/9	3/9	5/9	1

(b) $P(Y=y|X=2)=\dfrac{P(Y=y,X=2)}{P(X=2)}$. Dessa forma, temos:

$$P(Y=1|X=2)=0, \qquad P(Y=2|X=2)=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{3}{9}}=\frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(Y=3|X=2)=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{3}{9}}=\frac{2}{3}.$$

(c) $Var[X-Y]=Var[X]+Var[Y]-2Cov(X,Y)=$
$(E[X^2]-E[X]^2)+(E[Y^2]-E[Y]^2)-2(E[XY]-E[X]E[Y])$

$$E[X]=\sum_{x=1}^{3}x.p(x)=\frac{14}{9} \qquad E[X^2]=\sum_{x=1}^{3}x^2.p(x)=\frac{26}{9}$$

$$E[Y]=\sum_{y=1}^{3}y.p(y)=\frac{22}{9} \qquad E[Y^2]=\sum_{y=1}^{3}y^2.p(y)=\frac{58}{9}$$

$$E[XY]=\sum_{y=1}^{3}\sum_{x=1}^{3}x.y.p(x,y)=1\times1\times\frac{1}{9}+1\times2\times\frac{2}{9}+\ldots+3\times3\times\frac{1}{9}=\frac{36}{9}$$

Logo, $Var[X-Y]=\left(\frac{26}{9}-\left(\frac{14}{9}\right)^2\right)+\left(\frac{58}{9}-\left(\frac{22}{9}\right)^2\right)-2\left(\frac{36}{9}-\frac{14}{9}\times\frac{22}{9}\right)=$

$$=0,4691+0,4691-2\times0,1975=0,54321$$