UFRJ - CCMN - IM - Departamento de Métodos Estatísticos

Probabilidade e Estatística - Estatística

Primeira Prova 03-04-2014

Atenção: Não serão aceitas respostas sem justificativa: as expressões que levaram a alguma resposta numérica devem ser indicadas nos espaços apropriados.

---

1. Três pesquisadores pensam, de forma independente, na solução de um problema. Pela experiência e conhecimento de cada pesquisador sabe-se que as probabilidades de encontrar a solução são de 1/4 para A, de 1/5 para B e de 1/3 para C . Calcule a probabilidade:
   (a) de que o problema seja resolvido;
   (b) de pelo menos dois dos três pesquisadores resolverem o problema;
   (c) condicional de B resolver o problema dado que este foi resolvido por pelo menos dois pesquisadores.

2. Em um determinado jogo, um jogador vendado tem direito a escolher 5 cartas em um baralho contendo 8 cartas douradas e 12 cartas brancas. Cada vez que uma carta é escolhida, verifica-se a sua cor e ela é devolvida ao baralho, que é embaralhado. Cada carta dourada que o jogador tira rende-lhe um prêmio de R$ 100,00.
   (a) Quanto se espera que o jogador ganhe, em média, neste jogo? Qual é o desvio padrão do prêmio do jogador?
   (b) Qual é a probabilidade de que o jogador ganhe algo?
   (c) Qual é a probabilidade condicional de que o jogador ganhe o prêmio máximo, dado que ele ganhará algo?

3. Ocorem, em média, 10 desintegrações por minuto numa amostra de material radioativo. Suponhamos que o número, X, de desintegrações por minuto seja uma variável aleatória de Poisson e que T seja o intervalo de tempo em minutos entre duas desintegrações sucessivas.
   (a) Forneça a expressão matemática da função de densidade de T;
   (b) Qual é a probabilidade de que em um intervalo de tempo de 6 segundos não haja desintegrações?
   (c) Suponha que foram testadas independentemente 30 destas amostras e seja N o número de amostras para as quais não houve desintegrações antes de 6 segundos. Forneça a expressão matemática da função de probabilidade de N, a esperança de N, a variância de N. Calcule também, usando a aproximação pela lei Normal, $P(N \geq 9)$.

   Obs.: Lembre-se de que existe uma relação entre os modelos de Poisson e Exponencial.

4. Um pequeno restaurante tem uma receita diária - da qual já foi descontado o gasto com ingredientes - cuja média é de 800 reais e cujo desvio padrão é de 300 reais. A despesa mensal do restaurante com mão de obra, encargos, manutenção, etc., é da ordem de 12000 reais.
   (a) Se ele funciona na base de 25 dias por mês, qual a probabilidade de que esse negócio dê um lucro de pelo menos 7000 reais por mês?
   (b) Digamos que, em um determinado mês, o restaurante só vai ficar aberto durante 20 dias. Mas, ainda assim, deseja-se manter a meta de um lucro mínimo de 7000 reais. Para quanto deveria aumentar a média da receita diária para que nesse mês, uma vez mantido o desvio padrão da receita diária em 300 reais, essa meta fosse atingida com probabilidade 95%?

   Obs.: Admita que em ambos os casos o tamanho amostral é suficientemente grande para que seja válida a aproximação fornecida pelo Teorema Central do Limite.

Boa prova!

Soluções

1. Sejam os eventos:
   A, B e C = O pesquisador (A, B e C) resolver o problema;
   R = O problema ser resolvido;
   D = pelo menos dois dos três pesquisadores resolverem o problema.

   São dadas as probabilidades: $P(A) = 1/4, P(B) = 1/5$ e $P(C) = 1/3$. Para não carregar a notação suprimiremos, no caso de três eventos, o sinal de interseção. Por exemplo, o evento $A \cap B \cap C$ será denotado por ABC.

   (a) P(R) = 1 − P($A^cB^cC^c$) = 1 − (3/4 × 4/5 × 2/3) = 36/60 = 3/5 = 0,6;

   (b) P(D) = P($ABC \ \cup \ A^cBC \ \cup \ AB^cC \ \cup \ ABC^c$) = $\frac{1+2+4+3}{60} = \frac{1}{6} \approx 0,17$. Somamos as probabilidades porque os eventos ABC, A^cBC, AB^cC e ABC^c são Mutuamente Exclusivos;

   (c) $P(B \mid D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(ABC \ \cup \ A^cBC \ \cup \ ABC^c)}{10/60} = \frac{6/60}{10/60} = \frac{3}{5} = 0,60$. Os eventos ABC, A^cBC e ABC^c são Mutuamente Exclusivos.

2. Seja X o número de cartas douradas retiradas.
   Então, $X \sim Bin(n,p)$, em que $n = 5$ e $p = 8/20 = 0,4$.

   (a) Seja Y o prêmio do jogador.
   Então $Y = 100X$. Sabemos que $E(X) = np = 5 \times 0,4 = 2$.
   Assim, $E(Y) = E(100X) = 100E(X) = 100 \times 2 = 200$ e
   $DP(Y) = DP(100X) = \sqrt{100^2 Var(X)} = 100\sqrt{5 \times 0,4 \times 0,6} \approx 109,54$;

   (b) A probabilidade do jogador ganhar algo é
   $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0} 0,4^0 \times 0,6^5 = 1 - 0,07776 = 0,92224$;

   (c) A probabilidade condicional do jogador ganhar o prêmio máximo, dado que ele ganhou algo é

$$\begin{aligned} P(X = 5 \mid X \geq 1) &= \frac{P(X = 5, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X = 5)}{P(X \geq 1)} = \frac{\binom{5}{5} 0,4^5 \times 0,6^0}{P(X \geq 1)} = \\ &= \frac{0,01024}{0,92224} \approx 0,0111. \end{aligned}$$

3. (a) T $\sim Exp(\lambda = 10)$. Assim, $f_T(t) = 10e^{-10t}$, para $t \geq 0$;

   (b) $P[T > 0,1] = 1 - \int_0^{0,1} 10e^{-10t} dt = 0,3679$;

   (c) $P[N = k] = \binom{30}{k} (0,3679)^k (0,6321)^{30-k}$, para $k \in \{0, 1, ..., 30\}$
   $E[N] = 30 \times 0,3679 = 11,037$;
   $Var(N) = 30 \times 0,3679 \times 0,6321 = 6,9765$
   $N \sim$ Normal ($\mu = 11,037;\ \sigma^2 = 6,9765$) e
   $P[N \geq 9] = \Phi(-\frac{8+1/2-11,037}{\sqrt{6,9765}}) = \Phi(0,96) = 0,8315$.

4. Sejam:
   n = Número de dias de funcionamento em um mês
   X_i = receita do i-ésimo dia, i = 1,2,...,n, com $E(X_i) = 800$ e $DP(X_i) = 300$ para cada i
   Despesa mensal = D = 12000 (constante)
   Lucro mensal = L = $\sum_{i=1}^{n} X_i - D = \sum_{i=1}^{n} X_i - 12000$

   (a) Para n = 25 dias
   $P(L > 7000) = P(\sum_{i=1}^{25} X_i - 12000 > 7000) = P(\sum_{i=1}^{25} X_i > 19000)$
   Pelo TCL, $\sum_{i=1}^{25} X_i$ é aproximadamente N(25x800; 25x300^2). Então,

$$
\begin{aligned}
P(L > 7000) &= P(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 25 \times 800}{300\sqrt{25}} > \frac{19000 - 25 \times 800}{300\sqrt{25}}) = \\
&= P(Z > \frac{19000 - 20000}{1500}) = P(Z > -0,667) = 0,7475;
\end{aligned}
$$

   (b) Para n = 20 dias. Agora $E(X_i) = \mu$ (constante desconhecida)
   $0,95 = P(L > 7000) = P(\sum_{i=1}^{20} X_i - 12000 > 7000) = P(\sum_{i=1}^{20} X_i > 19000)$
   Pelo TCL, $\sum_{i=1}^{20} X_i$ é aproximadamente N(20μ; 20×300^2)
   Então, $0,95 = P(\sum_{i=1}^{20} X_i > 19000) = P(Z > \frac{19000-20\mu}{300\sqrt{20}})$
   Daí, $\frac{19000-20\mu}{300\sqrt{20}} = -1,64$, o que implica que $\mu = \frac{19000+1,64\times300\sqrt{20}}{20} = 1060,34$ reais.