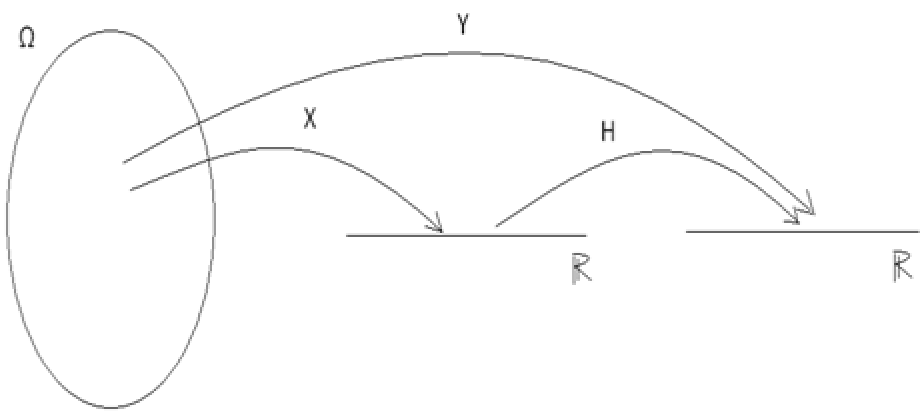
CAPÍTULO 4

FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Conceitos a serem introduzidos neste capítulo:

- Função de uma v.a. discreta
- Função de uma v.a.contínua.
- Esperança e variância de uma função de uma variável aleatória
- Propriedades da esperança, da variância e do desvio-padrão



- Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ao fazermos a transformação $Z = (X-\mu)/\sigma$, obtemos uma nova variável aleatória que tem distribuição Normal Padrão.
- A v. a. Z é uma função de X. Nesta situação a função de densidade foi facilmente obtida visto que ela é um caso particular do modelo Normal, em que $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$.

- Existem outros casos um pouco mais complexos. Suponha, por exemplo, que o diâmetro D de um rolamento (em mm) é uma v.a. cuja função de distribuição é conhecida. Então o volume do rolamento, $V = \frac{\pi D^3}{6}$ é também uma v.a. cuja função de distribuição podemos determinar a partir do conhecimento da distribuição correspondente a D.

- Mais geralmente, se X é uma v.a. e Y=H(X), então Y é também uma v.a. Nosso objetivo é determinar a distribuição de Y quando a de X é conhecida.

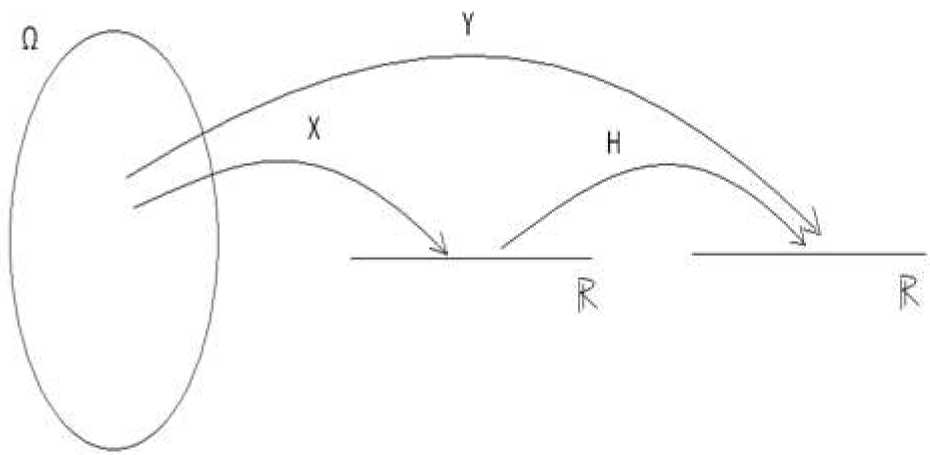


Figura 4.1 A variável aleatória Y vista como uma função composta de H com X

4.3 Esperança e variância de uma função de uma variável aleatória

Uma vez conhecida a lei de probabilidade de Y, a sua esperança e a sua variância podem também ser determinadas, bastando para isso que apliquemos as definições desses conceitos.

O propósito desta sub-seção é **exibir um caminho** para que a esperança e a variância de Y possam ser calculadas diretamente a partir do conhecimento da função H e da distribuição de probabilidade de X.

Se X é uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(x_i)=P(X=x_i)$ e $Y=H(X)$, então a esperança e a variância de Y são dadas por :

$$E(Y) = E(H(X)) = \sum_i H(x_i)p(x_i)$$

$$Var(Y) = Var(H(X)) = \sum_i (H(x_i) - E\big(H(X)\big))^2\, p(x_i)$$

Ou equivalentemente : $Var(Y) = Var(H(X)) = \sum_i (H(x_i))^2 p(x_i) - (E(H(X)))^2$

Se X é uma v.a. contínua, com função de densidade f, e se $Y=H(X)$, então

$$E(Y) = E(H(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x)f(x)dx$$

$$Var(Y) = Var(H(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} (H(x) - E\big(H(X)\big))^2 f(x)dx$$

Ou equivalentemente : $Var(Y) = Var(H(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(H(x)\big)^2 f(x)dx - (E\big(H(X)\big))^2$

Exemplo: Numa revendedora de carros.

Augusto é o gerente de uma revendedora de carros. Toda semana ele tem 5 carros para venda. Se ele vender até dois carros, não ganha qualquer adicional ao seu salário; porém se ele conseguir vender 3 ou mais carros, ganha um prêmio igual de R$ 500,00 por cada carro vendido. Suponha que as chances de venda dos diversos carros são independentes e que a probabilidade de cada carro ser vendido é 0,6. Determine o valor esperado, a variância e o desvio-padrão do prêmio semanal a ser recebido por Augusto.

Solução:

Temos

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{2} 0.\,p(k) + \sum_{k=3}^{5} 500k.\,p(k) = 0 + 1500p(3) + 2000p(4) + 2500p(5) =$$

$$= 1500\times 0{,}3456 + 2000\times 0{,}2592 + 2500\times 0{,}0778 = 1.231{,}30 \text{ reais.}$$

Logo, espera-se que o prêmio semanal de Augusto esteja ao redor de R$ 1.231,30.

Para Var(Y), procedemos calculando inicialmente o primeiro termo do lado direito da 2ª expressão, isto é,

$$\sum_k (H(k))^2 p(k) = 0^2\,(p(0)+p(1)+p(2)) + 1500^2 p(3) + 2000^2 p(4) + 2500^2 p(5) = 2.300.650$$

Daí, $\mathrm{Var}(Y) = 2.300.650 - (1.231{,}3)^2 = 784.550{,}31$ e $DP(Y) = \sqrt{784.550{,}31} = 885{,}75$ reais.

Observe que o prêmio de Augusto é bastante variável. Se aceitarmos que uma variação de $\pm$ 2 desvios padrão com relação à média é bem provável, Augusto pode ganhar desde zero até cerca de 3000 reais com alta chance.

Exemplo 4.9: Preço de um cabo de aço (cont.)

Voltemos ao cabo de aço do Exemplo. Determine o valor esperado e o desvio-padrão do preço desse cabo.

Solução:

Vimos que para a v.a. Y, preço do cabo,

$P(Y = 200{,}00) = P(X > 2180) = 0{,}8849$

$P(Y = 120{,}00) = P(2130 < X < 2180) = 0{,}1144$

$P(Y = 0{,}00) = P(X < 2130) = 0{,}0007$

Logo, $E(Y) = 200 \times 0{,}8849 + 120 \times 0{,}1144 + 0 \times 0{,}0007 = 190{,}7$.

Para a variância temos:

$$Var(Y) = (200^2 \times 0{,}8849 + 120^2 \times 0{,}1144 + 0^2 \times 0{,}0007) - (190{,}7)^2 = 568{,}9$$

Daí, $DP(Y) = 23{,}9$

Portanto, o preço médio dos rolos é de R$ 190,70, com desvio padrão igual a R$ 23,90.

4.4 Propriedades da esperança, da variância e do desvio-padrão

Agora temos condições de apresentar algumas interessantes propriedades das medidas de centralidade e de dispersão de uma variável aleatória. Algumas dessas propriedades serão aqui demonstradas, porém, para simplificar, as demonstrações serão feitas apenas para o caso contínuo.

1 - Esperança e variância de uma constante

Se c é uma constante, $E(c) = c$ e $Var(c) = 0$.

2 - Linearidade da esperança

Seja X uma v.a. contínua , com densidade f , e seja $Y = aX + b$ para a, b reais. Então,

$$E(Y) = E(aX+b) = aE(X)+b$$

Com efeito,

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty}(ax + b)f(x)dx = a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = aE(X) + b$$

Porque a primeira integral é igual a E(X) e a segunda igual a 1.

No caso particular em que $b = 0$, $E(aX) = a\,E(X)$

3 - Relação entre esperança e variância

Seja μ=E(X), finita. Então:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - \mu^2$$

O resultado deriva da própria definição de Var(X) porque

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = E\{(X-\mu)^2\}$$

Usando as propriedades das integrais e da esperança temos:

$$E\{(X-\mu)^2\} = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$$

4 - Variância de aX + b

Se a,b reais, $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$

Com efeito,

$$\mathrm{Var}(aX+b) = E[\{(aX+b) - E(aX+b)\}^2] = E[\{aX+b-aE(X)-b\}^2] =$$

$$= E[(aX-a\mu)^2] = a^2 E\{(X-\mu)^2\} = a^2\mathrm{Var}(X)$$

5 - Desvio padrão de aX + b

Se a, b reais, $a \neq 0$,

$\mathrm{DP}(aX+b) = |a|\mathrm{DP}(X)$ (Corolário do resultado anterior)

Exemplo 4.10: Média e variância da v.a. padronizada.

Seja X uma v.a. com $E(X) = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$ (finita), e seja $Z = (X-\mu)/\sigma$. Então:

$$E(Z) = E((X-\mu)/\sigma) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma} \{E(X) - \mu\} = 0 \quad \text{e}$$

$$Var(Z) = Var\{(X-\mu)/\sigma\} = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1$$

CAPÍTULO 5:
VARIÁVEIS ALEATÓRIAS BIDIMENSIONAIS

Conceitos a serem introduzidos::

- **Distribuição conjunta bivariada**
- **Função de probabilidade conjunta de um vetor aleatório discreto**
- **Função densidade conjunta**
- **Distribuições marginais**
- **Covariância e Coeficiente de correlação**
- **Independência de Variáveis Aleatórias**

O mapa, um exemplo de representação bidimensional

"Todas as coisas aparecem e desaparecem por causa da concorrência de causas e condições. Nada nunca existe inteiramente só, tudo está em relação com todo o resto."
Buda, líder espiritual

Variáveis aleatórias bidimensionais

Em muitos experimentos estamos interessados em observar mais de uma características de um determinado fenômeno. Por exemplo, na fabricação de um certo tipo de papel podemos estar interessados na gramatura (g/m^2) e na espessura (micra) do material produzido.

Se (X,Y) é uma variável aleatória bidimensional, então a cada elemento ω do espaço amostral Ω corresponde um único ponto de coordenadas $(X(\omega), Y(\omega))$, situado no plano a duas dimensões, como na Figura 5.2 a seguir.

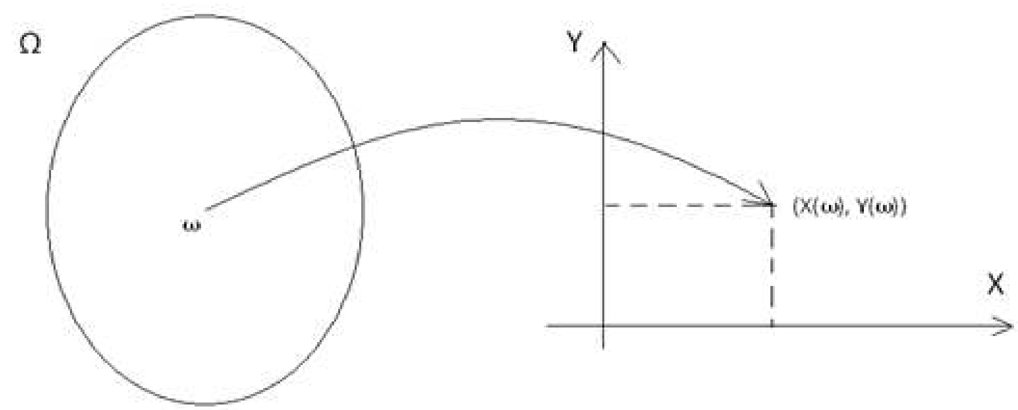


Figura 5.2 – Uma v.a. bidimensional, seu domínio e seu contra-domínio

Exemplo: Suponha que estamos interessados em estudar a composição de lotes de três peças quanto ao número de peças defeituosa, sabe-se que na linha de produção 10% das peças são defeituosas. Sejam as v.a.:

X = número de peças defeituosas entre as 3 selecionadas;

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{se a primeira peça é defeituosa (D)} \\ 0, & \text{se a primeira peça é perfeita} \quad \text{(P)} \end{cases}$$

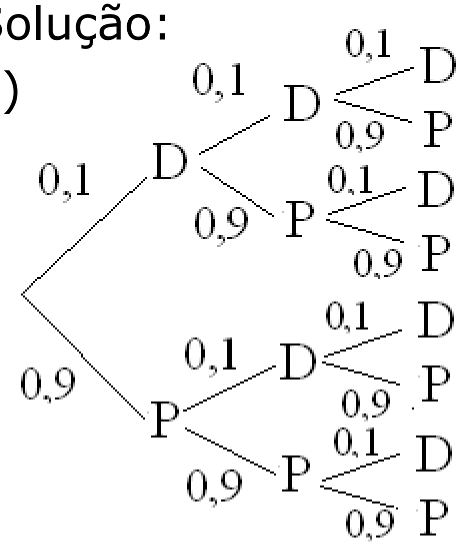
Z = Número de vezes em que houve variação de qualidade, mudanças de D para P ou de P para D, entre as peças selecionadas dentro de um lote.

a) montar uma tabela relacionando resultados de Ω e as suas probabilidades com as v.a. X, Y e Z;

b) montar uma tabela de probabilidade conjunta, de dupla entrada, para os pares: XY; XZ e YZ

Solução:

a)



Ω	Prob.	X	Y	Z
DDD	0,001	3	1	0
DDP	0,009	2	1	1
DPD	0,009	2	1	2
DPP	0,081	1	1	1
PDD	0,009	2	0	1
PDP	0,081	1	0	2
PPD	0,081	1	0	1
PPP	0,729	0	0	0

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,729	0,243	0,027	0,001

y	0	1
P(Y=y)	0,900	0,100

z	0	1	2
P(Z=z)	0,730	0,180	0,090

b)

Y \ X	0	1	2	3
0	0,729	0,162	0,009	0,000
1	0,000	0,081	0,018	0,001

Z \ X	0	1	2	3
0	0,729	0,000	0,000	0,001
1	0,000	0,162	0,018	0,000
2	0,000	0,081	0,009	0,000

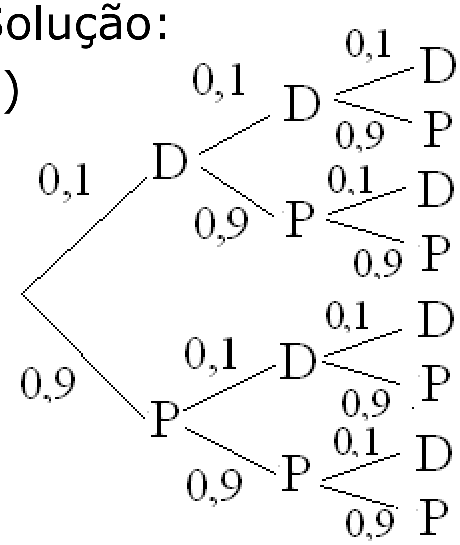
Z \ Y	0	1
0	0,729	0,001
1	0,090	0,090
2	0,081	0,009

a) montar uma tabela relacionando resultados de Ω e as suas probabilidades com as v.a. X, Y e Z;

b) montar uma tabela de probabilidade conjunta, de dupla entrada, para os pares: XY; XZ e YZ.

Solução:

a)



Ω	Prob.	X	Y	Z
DDD	0,001	3	1	0
DDP	0,009	2	1	1
DPD	0,009	2	1	2
DPP	0,081	1	1	1
PDD	0,009	2	0	1
PDP	0,081	1	0	2
PPD	0,081	1	0	1
PPP	0,729	0	0	0

x	0	1	2	3
P(X=x)	0,729	0,243	0,027	0,001

y	0	1
P(Y=y)	0,900	0,100

z	0	1	2
P(Z=z)	0,730	0,180	0,090

5.1 . Variáveis aleatórias bidimensionais discretas.

Começaremos estudando o caso em que ambas as v.a.'s , X e Y , são discretas.

Suponha a v.a. discreta X assumindo os valores x_1 , x_2 , x_3 , ... e a v.a discreta Y assumindo os valores y_1, y_2 , y_3 , ... Assim sendo, os valores que a v.a. bidimensional (X,Y) pode assumir são da forma (x_i , y_j).

Diremos que $p(x_i , y_j) = P(X = x_i , Y = y_j)$ define a **função de probabilidade conjunta** da v.a. bidimensional discreta (X,Y) se:

a) $p(x_i , y_j) \geq 0$ para todo par (i, j)

b) $\sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1$

Observação: A notação $P(X=x_i , Y=y_j)$ significa $P(X=x_i \text{ e } Y=y_j)$, ou seja, representa uma **interseção**.

Exemplo 5.1 .- Defeitos em carros

- Os carros de uma determinada marca podem apresentar dois tipos de defeitos até a primeira revisão: **Defeitos graves** (que comprometem o funcionamento) e **defeitos menores** (tais como defeitos de acabamento, e outros que não comprometam o funcionamento). Suponha que costumam ocorrer até 2 defeitos graves e até 3 menores, sendo que as probabilidades de ocorrência obedecem à tabela abaixo.

Seja **X a v.a que representa o número de defeitos graves** e **Y a v.a. representando o número de defeitos menores**.

A Tabela abaixo mostra como se distribuem as probabilidades conjuntas $p(x_i, y_j)$ para os diferentes valores X e Y . Note que a soma de todas as probabilidades é 1

X	Y				$P(X=x_i)$
	0	1	2	3	
0	0,20	0,20	0,14	0,06	0,60
1	0,15	0,08	0,04	0,03	0,30
2	0,05	0,02	0,02	0,01	0,10
$P(Y=y_j)$	0,40	0,30	0,20	0,10	1,00

- $p(1,3) = P(X=1, Y=3) = 0{,}03$
- $P(X>Y) = p(1,0)+p(2,0)+p(2,1) = 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}02 = 0{,}22$ (22%)
- $P(X=Y) = p(0,0) + p(1,1) + p(2,2) = 0{,}20 + 0{,}08 + 0{,}02 = 0{,}30$

Distribuições marginais

A partir da **distribuição conjunta** é possível determinar as suas distribuições individuais, que passam a ser chamadas de **marginais**.

Para calcular a probabilidade marginal relativa a um dado valor de X , mantemos fixo esse valor e somamos sobre todos os possíveis valores de Y. Procederemos analogamente se desejarmos obter a probabilidade marginal para um determinado valor de Y.

Sejam X e Y v.a.'s discretas com valores $\{x_1, x_2, x_3,...\}$e$\{y_1, y_2, y_3,...\}$, respectivamente, e com função de probabilidade conjunta $p(x_i , y_j) = P(X=x_i , Y=y_j)$.

Sejam $p_X(x_i) = P(X=x_i)$ e $p_Y(y_j) =P(Y=y_j)$ as correspondentes funções de probabilidade marginais de X e Y .

Então $p_X(x_i) = \sum_{\forall j} p(x_i , y_j)$ e $p_Y(y_j) = \sum_{\forall i} p(x_i , y_j)$

No caso contínuo, define-se uma função de densidade marginal de maneira semelhante usando **integrais** ao invés de **somatórios**.

Sejam X e Y v.a.'s contínuas com função de densidade conjunta f e sejam f_X e f_Y as funções de densidade marginais de X e de Y, respectivamente. Então,

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$ e $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$

5.4 .- Cálculo das medidas de centralidade e de dispersão a partir da distribuição conjunta

Conhecida a distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias é possível obter a esperança, a variância e o desvio-padrão de cada uma das v.a's., **sem necessidade de se obter previamente as distribuições marginais**.

Caso discreto :

$$E(X) = \sum_i \sum_j x_i \, p(x_i, y_j) \quad ; \quad Var(X) = \sum_i \sum_j x_i^2 \, p(x_i, y_j) - \{E(X)\}^2$$

$$E(Y) = \sum_i \sum_j y_j \, p(x_i, y_j) \quad ; \quad Var(Y) = \sum_i \sum_j y_j^2 \, p(x_i, y_j) - \{E(Y)\}^2$$

Duas v. a. discretas através de um exemplo:

Suponha dois portos A e B cujas capacidades de atendimento diários são 2 e 3 navios por dia. Sejam X e Y as variáveis aleatórias que representam respectivamente o número de navios atendidos diariamente em A e em B. Então, X pode assumir os valores 0,1,2 e Y os valores 0,1,2 e 3. Suponha também que a <u>distribuição conjunta</u> de X e Y é dada pela tabela abaixo:

		0	1	2	3
	0	0,01	0,05	0,05	0,04
X	1	0,05	0,20	0,15	0,10
	2	0,04	0,15	0,10	0,06

Onde: o valor na posição (i,j) mede a probabilidade de que X=i e Y=j simultaneamente, onde i={0,1,2} e j={0,1,2,3}

- **Sendo assim, qual a probabilidade de que,em um dia determinado:**
  - **a) O porto A não atenda navios?**
  - **b) O porto B use a sua capacidade máxima de atendimento?**
  - **c) O porto A atenda mais navios que o porto B?**
  - **d) A soma de atendimento nos dois portos seja de, pelo menos, 4 navios?**

Solução:

a) $P[X=0] = P[X=0,Y=0] + P[X=0,Y=1] + P[X=0,Y=2] + P[X=0,Y=3] = 0.01 + 0.05 + 0.05 + 0,07 = 0.15$

b) $P[Y=3] = P[X=0,Y=3] + P[X=1,Y=3] + P[X=2,Y=3] + P[X=3,Y=3] = 0.04 + 0.10 + 0.06 = 0.20$

c) $P[X>Y] = P[X=1,Y=0] + P[X=2,Y=0] + P[X=2,Y=1] = 0,05 + 0,04 + 0,15 = 0,24$

d) $P[X+Y\geq 4] = P[X=1,Y=3] + P[X=2,Y=2] + P[X=2,Y=3] = 0,10 + 0,10 + 0,06 = 0,26$

Usando este mesmo exemplo podemos introduzir mais alguns conceitos:

- **Distribuição marginal de X** (ver última coluna, onde cada valor corresponde à soma das probabilidades naquela linha)

- **Distribuição marginal de Y** (ver última linha, onde cada valor corresponde à soma das probabilidades naquela coluna)

Distribuição marginal

	Y	0	1	2	3	P(X=x)
X	0	0,01	0,05	0,05	0,04	0,15
	1	0,05	0,20	0,15	0,10	0,50
	2	0,04	0,15	0,10	0,06	0,35
P(Y=y)		0,10	0,40	0,30	0,20	1,00

Independência de Variáveis Aleatórias Discretas.

- **Diz-se que as variáveis aleatórias X e Y são <u>independentes</u> se:**
  $P[X = x_i , Y = y_j] = P[X = x_i] . P[Y = y_j]$
  para todo par (xi , yj) de valores de X e Y.
- **Suponha que dois portos sejam suficientemente afastados de modo que a operação em um deles não exerce influência sobre a operação do outro. :**

		0	1	2	3	P(X=x)
	0	0,015	0,060	0,045	0,030	0,15
X	1	0,050	0,200	0,150	0,100	0,50
	2	0,035	0,140	0,105	0,070	0,35
P(Y=y)		0,10	0,40	0,30	0,20	1,00

Observe que agora o produto das marginais corresponde ao probabilidade conjunta

5.6. Variáveis aleatórias independentes.

Sabemos, do capítulo 1, que dois eventos A e B são independentes se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Portanto podemos dizer que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se, para quaisquer dois conjuntos de números reais, A e B,

$$P(X \in A\, ,\, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Se, em particular, $A = (-\infty, x)$, $B = (-\infty, y)$, dizemos que duas variáveis aleatórias são independentes se

$$\mathbf{P(X \leq x\, ,\, Y \leq y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y),\ para\ x\ e\ y\ reais\ .}$$

Caso discreto:

No caso de X e Y serem discretas a definição de independência de X e Y segue a linha da definição de dois eventos independentes. Com efeito, se $A = \{X=x_i\}$ e $B = \{Y=y_j\}$ então $A \cap B = \{X=x_i, Y=y_j\}$. Desta maneira, diremos que:

> As v.a.´s discretas X e Y são <u>independentes</u> se para todo par (x_i, y_j) de valores possíveis de (X, Y) se verifica :
>
> $$P(X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i).P(Y=y_j),$$
>
> ou seja, $p(x_i, y_j) = p_X(x_i).p_Y(y_j)$.

Exemplo 5,10: Imóveis à venda (Duas v.a.´s discretas independentes)

Considere a população de todos os apartamentos que, em determinado dia, estejam anunciados para venda no *site* de uma imobiliária. Sejam X e Y, respectivamente, o número de vagas de garagem e o número de varandas correspondentes a um apartamento anunciado nesse *site*.

X	Y			$P(X=x_i)$
	0	**1**	**2**	
0	0,20	0,15	0,15	0,50
1	0,16	0,12	0,12	0,40
2	0,04	0,03	0,03	0,10
$P(Y=y_j)$	0,40	0,30	0,30	1,00

$$p_X(0).p_Y(0) = 0,50 \times 0,40 = 0,20 = p(0,0)$$
$$p_X(1).p_Y(0) = 0,40 \times 0,40 = 0,16 = p(1,0)$$
$$p_X(1).p_Y(1) = 0,4 \times 0,30 = 0,12 = p(1,1)$$

Concluímos então que neste caso X e Y são variáveis aleatórias independentes. Isto significa que, para esses apartamentos, há independência entre o número de vagas de garagem e o número de varandas.

5.7 Covariância e Correlação

Até agora consideramos medidas de centralidade ou de dispersão relativas somente às distribuições marginais. A seguir veremos alguns **parâmetros que medem a interdependência de duas variáveis aleatórias**. Uma delas é a covariância entre X e Y

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias. Suponha que tanto as suas esperanças $E(X) = \mu_x$ e $E(Y) = \mu_y$ como as suas variâncias Var(X) e Var(Y) todas elas existem e são finitas. Então a **Covariância entre X e Y** é dada por :

$$Cov(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

e é também finita.

Uma expressão alternativa para a Covariância é :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_x \mu_y$$

Esta definição é válida tanto para o caso discreto quanto para o caso contínuo.

$$E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]=(XY-X\mu_y-\mu_X Y+\mu_x\mu_y) = E(XY)-\mu_Y E(X)-\mu_x E(Y)+\mu_x \mu_y=E(XY)-\mu_x \mu_y$$

Propriedades da Covariância

1) Cov(X,Y) pode ser positiva, negativa ou nula.

2) Cov(X,X) = Var(X)

3) Se X e Y são v.a independentes, então

$E(XY) = E(X)E(Y)$ e, conseqüentemente, $Cov(X, Y) = 0$

4) $Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$

5) $Var(X+Y)=Var(X) + Var(Y)$, se X e Y são independentes

6) $Cov(aX + bY, cX + dY) = ac\ Var(x) + bd\ Var(Y) + (ad+bc)\ Cov(X,Y)$

Nota: A recíproca da propriedade **3** não é verdadeira, isto é, **podemos ter Cov(X,Y) = 0 sem que X e Y sejam independentes.**

Outro parâmetro que mede a interdependência entre duas variáveis aleatórias é o coeficiente de correlação.

Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional. Suponha que $E(X) = \mu_X$ e $E(Y) = \mu_Y$ existem e que Var(X) e Var(Y) são finitas e não nulas. **O coeficiente de correlação entre X e Y**, que denotaremos por $\rho(X,Y)$, é definido como

$$\rho(X,Y) = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{DP(X)DP(Y)} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Nota: Se não houver dúvidas quanto às variáveis envolvidas podemos denotar o coeficiente de correlação simplesmente por ρ.

Propriedades do Coeficiente de Correlação:

1) O coeficiente de correlação é adimensional.

2) Pode-se demonstrar que $-1 \leq \rho \leq 1$

3) Se X e Y são v.a.'s independentes, $\rho(X,Y) = 0$.
(Este resultado deriva do fato de que, neste caso, $Cov(X,Y) = 0$).

4) Se X e Y são duas v.a.'s tais que $Y = aX + b$, a e b constantes reais, $a \neq 0$, então

$\rho(X,Y) = 1$, se e somente se $a > 0$ e
$\rho(X,Y) = -1$, se e somente se $a < 0$.

Nota: A recíproca da propriedade 3 não é verdadeira, isto é, podemos ter $\rho(X,Y) = 0$ sem que X e Y sejam independentes.

O resultado acima mostra que **o coeficiente de correlação é uma medida do grau de linearidade da relação entre as v. a.´s X e Y**. Quanto mais próximo ρ estiver de +1 ou de – 1, maior será este grau de linearidade.

Além disso, $\rho > 0$ indica que há uma tendência a que X e Y cresçam conjuntamente; enquanto que um valor $\rho < 0$, sinaliza para uma tendência de Y decrescer à medida que X aumenta.

É importante salientar também que um valor de **ρ próximo de zero não significa necessariamente a ausência de uma relação entre X e Y**. Este fato indica apenas que a relação, se existir, **não é linear**. Isto porque, como vimos anteriormente, **$Cov(X,Y) = 0$ não implica em independência entre X e Y**.

Obs.:

1. Note que se a unidade de medida da v.a. X é u_x e a unidade de medida da v.a Y é u_y, então a covariância entre X e Y se expressa na unidade $u_x u_y$. Já o coeficiente de correlação é adimensional.
2. Além disso, enquanto a variância em princípio pode assumir qualquer valor real, o coeficiente de correlação está restrito ao intervalo $[-1,1]$.
3. Sendo assim, se (X,Y) e (V,W) são duas v.a.'s bidimensionais, não é possível comparar Cov(X,Y) (expressa em $u_x u_y$) com Cov(V,W) (expressa em $u_v u_w$). Já $\rho(X,Y)$ e $\rho(V,W)$ podem ser comparados entre si.

CAPÍTULO 6

VETORES ALEATÓRIOS MULTIDIMENSIONAIS

Conceitos e resultados a serem apresentados neste capítulo:

- Vetores aleatórios n-dimensionais, discretos e contínuos
- Independência de n variáveis aleatórias
- Propriedades adicionais da esperança e da variância
- Soma de n Variáveis Aleatórias Independentes
- Combinação Linear de n Normais independentes
- Teorema Central do Limite
- Aproximações Normais para Binomial, Poisson.

Na fabricação de lâminas de aço o interesse do fabricante pode estar centrado nas seguintes variáveis: conteúdo de carbono(%), de manganês(%), de silício (%), de fósforo(%), de enxofre(%), de cromo (%) e desgaste químico (g/m^2).

Neste caso existiriam sete variáveis aleatórias, X_1, X_2,.. , X_7, observadas simultaneamente. O vetor (X_1, X_2, ... , X_7), formado por essas sete variáveis, é um exemplo do que se denomina <u>variável aleatória multidimensional</u> ou <u>vetor aleatório multidimensional</u> e dizemos que X_1, X_2,.. e X_7 têm uma <u>distribuição conjunta</u>.

CAPÍTULO 6

VETORES ALEATÓRIOS MULTIDIMENSIONAIS

Conceitos e resultados a serem apresentados neste capítulo:

Vetores aleatórios n-dimensionais, discretos e contínuos

Independência de n variáveis aleatórias

Propriedades adicionais da esperança e da variância

Soma de n Variáveis Aleatórias Independentes

Combinação Linear de n Normais independentes

Teorema Central do Limite

Aproximações Normais para Binomial, Poisson.

"Vivemos numa realidade multidimensional, simultaneamente econômica, psicológica, mitológica, sociológica, mas estudamos estas dimensões separadamente, e não umas em relação com as outras. O princípio de separação torna-nos talvez mais lúcidos sobre uma pequena parte separada do seu contexto, mas nos torna cegos ou míopes sobre a relação entre a parte e o seu contexto."

Edgar Morin, filósofo

6.1 Distribuição Conjunta

Os conceitos vistos no capítulo 5 para uma variável aleatória bidimensional podem ser estendidos ao caso de uma v.a. multidimensional.

Vetores aleatórios multidimensionais discretos e contínuos

Funções de probabilidade, de densidade e de Distribuição Acumulada conjuntas

Dizemos que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um vetor aleatório n-dimensional discreto se C_i ($\subset \mathbb{R}$) é o conjunto (enumerável) de valores da v.a. X_i, para todo $i = 1,2,\dots,n$, e existe uma função $p: C_1 \times \dots \times C_n \to \mathbb{R}$, chamada função de probabilidade conjunta de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tal que:

(a) $p(x_1,\dots x_n) = P(X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n) \geq 0$, para todo vetor $(x_1,\dots x_n) \in C_1 \times \dots \times C_n$

(b) $\sum_{x_1 \in C_1} \dots \sum_{x_n \in C_n} p(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Dizemos que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é um vetor aleatório n-dimensional contínuo se existe uma função não negativa f, definida no espaço n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, chamada de função de densidade de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ou função de densidade conjunta de $X_1, X_2, \dots, X_n$, tal que, para toda região R n-dimensional contida em $\mathbb{R}^n$,

$$P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in R] = \int \dots \int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

A função f acima deve ser não negativa e tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$$

Tanto no caso discreto como no caso contínuo, a função de distribuição acumulada conjunta de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n),$$

para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_n$ do conjunto dos números reais.

As funções de probabilidade (no caso discreto) e de densidade (no caso contínuo), tanto as marginais como as condicionais, e também as esperanças e variâncias condicionais são definidas e obtidas de modo análogo ao que foi visto no caso bidimensional (Ver Capítulo 5).

Por exemplo, se (X_1, X_2, X_3) é uma v.a. tridimensional contínua, com densidade conjunta f, então:

- A densidade marginal de X_1 é

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 dx_3$$

- A densidade conjunta de (X_1, X_3) é

$$f_{13}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 \quad , \quad \text{etc.}$$

- A densidade condicional de (X_2, X_3) dado $X_1 = x_1$ é

$$f(x_2, x_3|x_1) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_1(x_1)}, \quad \text{se} \quad f_1(x_1) > 0$$

- A densidade condicional de X_2 dados $X_1 = x_1$ e $X_3 = x_3$ é

$$f(x_2 \mid x_1, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3)}{f_{13}(x_1, x_3)} \quad , \quad \text{se } f_{13}(x_1, x_3) > 0$$

- A esperança condicional de X_2 dados $X_1 = x_1$ e $X_3 = x_3$ é

$$E(X_2| x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \; f(x_2|x_1, x_3)\, dx_2 \quad ,$$

- A esperança e a variância de X_3 são, respectivamente:

$$E(X_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_3 \; f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2\, dx_3$$

$$Var(X_3) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_3 - E(X_3))^2 \; f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2\, dx_3$$

6.4 Soma de Variáveis Aleatórias Independentes

No Capítulo anterior vimos que em alguns casos a soma de duas variáveis aleatórias independentes, de distribuição conhecida, resulta em uma nova variável cuja distribuição também é conhecida. Assim, vimos que a soma de duas variáveis aleatórias independentes com distribuições de Poisson de parâmetros λ_1 e λ_2 é uma nova variável aleatória, também com distribuição de Poisson e de parâmetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

Exemplo 5.15: Soma de duas v.a´s Poisson´s independentes

Sejam $X \sim$ Poisson (λ_1) e $Y \sim$ Poisson(λ_2) , variáveis aleatórias independentes, e seja $Z = H(X,Y) = X+Y$.

Determine a função de probabilidade de Z .

Solução:

Dado que X e Y assumem valores inteiros não negativos, Z assumirá também valores inteiros não negativos. Temos, para um dado valor k de Z, sendo k = 0,1,2,... :

$$P(Z=k) = P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = k - i,\ Y = i)$$

Sabemos que X e Y são independentes, portanto:

$$P(Z=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i,\ Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

Logo , $P(Z=k) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1 + \lambda_2)^k$,

Pela fórmula do Binômio de Newton, vemos que o somatório acima é igual a $(\lambda_1 + \lambda_2)^k$.

o que implica que $Z \sim$ Poisson$(\lambda_1+\lambda_2)$.

Neste Capítulo esses resultados serão estendidos ao caso da soma de n variáveis aleatórias independentes.

Neste Capítulo esses resultados serão estendidos ao caso da soma de n variáveis aleatórias independentes. Novos casos semelhantes serão apresentados além de outras propriedades importantes envolvendo somas de várias variáveis aleatórias independentes, entre as quais está o Teorema Central do Limite.

Distribuição das n v.a.'s independentes originais	**Distribuição da Soma das n v.a.'s independentes**
$X_i \sim$ Bernoulli(p), i=1, ..., n	$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Binomial(n,p)
$X_i \sim$ Binomial(n_i, p), i=1, ..., k	$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Binomial(m,p), onde $m = \sum_{i=1}^{k} n_i$
$X_i \sim$ Geométrica(p), i=1, ..., n	$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Pascal(n,p)
$X_i \sim$ Poisson(λ_i), i=1, ..., n	$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Poisson(λ), onde $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
$X_i \sim$ Exponencial(λ), i=1, ..., n	$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Gama(n,λ)

Independência de V. A. Contínuas.

- **O conceito de distribuição conjunta pode , naturalmente, ser estendido a variáveis aleatórias contínuas.**
- **Definiremos a função de distribuição conjunta das v. a. contínuas X e Y como $F(x,y) = P(X \leq x , Y \leq y)$**
- **Para definir o conceito de v. a. contínuas independentes adotaremos a seguinte notação : Se A = [a, b] escreveremos $P(X \in A)$ para expressar $P(a \leq X \leq b)$.**

Definição :

As v. a. X1 , X2 , ... , Xn são independentes se
$P(X_1 \in A_1, . . . , X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) P(X_2 \in A_2) \ldots P(X_n \in A_n)$
para quaisquer conjuntos $A_1 , A_2 , . . . , A_n$.

Este é um dos mais importantes conceitos em Estatística porque possibilita a sua aplicação em diversos tipos de problemas tanto práticos quanto teóricos.

Exemplo:

É sabido que a precipitação anual de chuva em uma dada região é uma variável aleatória normalmente distribuída com média de 26,8 cm e desvío padrão de 2,6 cm. Determine a probabilidade de que em cada um dos três próximos anos a precipitação anual ultrapasse 32 cm.

Solução : **Sejam X_1 , X_2 , X_3 as variáveis aleatórias representando as precipitações anuais em cada um dos três próximos anos. Cada variável terá distribuição normal com meda 26,8 cm e desvio padrão 2.6 cm. Podemos supor independência de um ano para o outro. Assim , o que precisamos é calcular**

$$P(X_1>32, X_2>32, X_3 > 32) = P(X_1>32). P(X_2>32). PX_3>32)$$
$$= \{P(X_1 > 32)\}^3$$

- $P(X_1>32) = 1-\phi\left(\frac{32-26,8}{2,6}\right) = 0,0228$

- **Assim sendo , a probabilidade pedida é $(0,0228)^3$**

Soma de v. a. normais independentes.

Os resultados acima são especialmentes importantes quando aplicados a variáveis normais independentes. Daremos o seguinte resultado sem demonstração.

<u>Teorema:</u> A soma de variáveis aleatórias Normais independentes é uma Normal.

Sejam X1, X2, ..., Xn variáveis aleatórias independentes Normalmentes distribuídas com $E(X_i)=\mu_i$ e $Var(X_i) = \sigma_i^2$ e sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ constantes, e seja $Y=a_1X_1+a_2X_2 \dots +a_nX_n$, então Y tem distribuição normal

com média $\mu_Y=a_1\mu_1+a_2\mu_2 \dots +a_n\mu_n$ e

variância $\sigma_Y^2 = a_1^2\, \sigma_1^2+a_2^2\, \sigma_2^2+\dots+a_n^2\, \sigma_n^2$

<u>Exemplo:</u> Carga máxima num elevador. A carga máxima que um elevador suporta é 400 kg. Numa certa região, onde o elevador funciona, o peso das pessoas pode ser suposto como uma distribuição Normal com média de 75kg e o desvio padrão de 15kg. Supomos também que o peso de uma pessoa independe da outra. Deseja-se saber qual a probabilidade de com 5 pessoas o elevador não ultrapasse a carga máxima.

Exemplo:

Na fabricação de uma certa peça**,** um eixo cilíndrico, com uma seção transversal circular deve-se encaixar num soquete circular . É sabido que as distribuições do diâmetro do eixo e do diâmetro do soquete são ambas Normais. Para o diâmetro do eixo a média é de 3,42 cm, com um desvio padrão de 0,01 cm. Para o diâmetro de soquete, a média é 3, 47 cm, com um desvio padrão de 0,02 cm. Suponha que, para efeitos de montagem, as componentes das peças são selecionadas ao acaso, e que eles só se encaixam se a folga estiver entre 0,025 cm e 0,100 cm. Qual a probabilidade do eixo se encaixar no soquete? Suponha independência entre os diâmetros do eixo e do soquete.

- **Solução** .- Sejam X_1 e X_2 as v.a que representam, respectivamente, os diâmetros do eixo e do soquete.

Então $X_1 \sim N(3{,}42\ ;\ 0{,}01^2)$ e $X_2 \sim N(3{,}47\ ;\ 0{,}02^2)$.

Seja $Y = X_2 - X_1$. Temos $\mu_Y = \mu_2 - \mu_1 = 3{,}47 - 3{,}42 = 0{,}05$

- $\sigma_Y^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 0{,}01^2 + 0{,}02^2 = 0{,}0005$ e $\sigma_Y = 0{,}0224$

Portanto, $Y \sim N(0{,}05\ ;\ 0{,}0005)$

O eixo encaixará no soquete se $0{,}025 < Y < 0{,}100$.

A probabilidade disto ocorrer é

$P(0{,}025 < Y < 0{,}1) = 0{,}856$

- Ou seja, aproximadamente 85,6% dos casos os componentes conseguem se encaixar.

Teorema Central do Limite

Seja X_1 , X_2, X_3 , ...uma seqüência de v.a.'s independentes identicamente distribuidas (iid) cada uma com a mesma esperança μ e a mesma variância σ^2 . Seja $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Então A distribuição de $\frac{Y_n - E(Y_n)}{DP(Y_n)} = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ tende à distribuição Normal padrão quando $n \to \infty$.

Este é um dos resultados mais importantes da Teoria das Probabilidades e mostra a importância da distribuição Normal. Com efeito, conforme este Teorema , independente de qual seja a distribuição original considerada, a distribuição da soma de quaisquer n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas tende a uma Normal, quando n tende a infinito.

Ou seja, para n suficientemente grande, a distribuição da soma de quaisquer variáveis aleatórias iid pode ser aproximada pela distribuição Normal.

Em particular, quando a distribuição original das variáveis aleatórias iid já é Normal, sua soma é exatamente (e não apenas aproximadamente) Normal, para qualquer valor de n.

Exemplo:

Cinqüenta números, que originalmente tinham várias casas decimais, depois de arredondados, passaram a ter apenas duas casas decimais. Admita-se que os erros individuais de arredondamento são independentes e podem ser modelados como uniformes no intervalo (- 0,005; + 0,005)

a) Qual a probabilidade de que a distância (módulo da diferença) entre a soma dos números já arredondados e a soma dos números originais seja **maior** que 0,03?

b) Qual o valor da constante c para que essa distância seja maior que c com apenas 1% de probabilidade?

- **Solução.-** Denotemos por X_i a variável aleatória que representa o i-ésimo erro de arredondamento (i = 1,2,3,..., 50). Sabemos que as X_i's são v.a.'s iid com distribuição U(-0,005 ; +0,005). Portanto, para todo i , $E(X_i) = \mu = 0$ e $Var(X_i) = \sigma^2 = 0{,}01^2/12$.

a) Seja $Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$; então $E(Y) = 50\mu = 0$ e

$Var(Y) = 50\,\sigma^2 = 4{,}1667\times10^{-4}$, donde $DP(Y)= 0{,}0204$

Exemplo:

Y é a v.a. que representa a diferença entre a soma dos números já arredondados e os números originais. Pelo Teorema Central do Limite (**TCL**) , Y tem , aproximadamente, uma distribuição **normal com média 0 e desvio padrão 0,0204** .

- Assim, a probabilidade pedida é **P(|Y|> 0,03)** = P $\left(|Z| > \frac{0,03}{0,0204}\right)$ =

P(|Z|> 1,47) = 2(1 - Φ(1,47)) = 2(1 – 0,9292)=0,1416 (14,16%)

b) Deseja-se determinar o valor de c tal que P(|Y| > c) = 0,01 .

Temos, P(|Y| > c) = 0,01 $\quad P\left(|Z| > \frac{c}{0,0204}\right)$ = 0,01, então

$2\left(1 - \Phi\left(\frac{c}{0,0204}\right)\right) = 0,01$

$\Phi\left(\frac{c}{0,0204}\right) = 1 - 0,01/2 = 0,995$, então $\frac{c}{0,0204} = 2,575$

Então, c = 0,05253 ≈ 0,053.

Portanto, o valor de c é aproximadamente de 0,053 para que a probabilidade do valor absoluto da diferença entre a soma dos valores arredondados e a soma original ser maior do que c seja de 1%.

6.7 Aproximação de diversas Distribuições pela distribuição Normal

Na seção 6.4 vimos que, em muitos casos de interesse, a distribuição de probabilidade da soma de n v.a.'s independentes depende da distribuição de probabilidade de cada uma das n parcelas:

- Uma v.a. com distribuição Binomial(n,p) pode ser considerada como uma soma de n v.a.'s independentes com distribuição de Bernoulli(p)
- Uma v.a. com distribuição Pascal(n,p) pode ser considerada como uma soma de n v.a.'s independentes com distribuição Geométrica(p)
- Uma v.a. com distribuição Poisson(λ) pode ser considerada como uma soma de n v.a.'s independentes com distribuição Poisson(λ_i), onde $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
- Uma v.a com distribuição Gama(n, λ) pode ser considerada como uma soma de n v.a.'s com distribuição Exponencial(λ).

Uma conseqüência destas associações e do Teorema Central do Limite é que, quando $n \to \infty$, as distribuições dessas variáveis, que podem ser vistas como somas de n v.a.'s independentes, se aproximam da distribuição Normal.

6.7.1 Aproximação da distribuição Binomial pela Normal

Seja X uma variável aleatória com distribuição Binomial de parâmetros n e p, portanto $E(X) = np$ e $DP(X) = \sqrt{np(1-p)}$. Como X é a soma de n v.a.'s com distribuição de Bernoulli(p), então, pelo Teorema Central do Limite:

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

tem distribuição aproximadamente Normal padronizada, se n for suficientemente grande.

Obs.: a aproximação da Binomial por uma Normal funciona tanto melhor quanto mais o p se aproxima de ½. Assim, a título de regra prática, recomenda-se usar a aproximação da Binomial por uma Normal somente quando $np(1-p) \geq 3$.

Correção de Continuidade:

Caso se deseje calcular $P[a \leq X \leq b]$, onde a e b são números inteiros, como se trata de aproximar uma distribuição discreta (Binomial) por uma contínua (Normal), convém introduzir, antes de mais nada, uma correção: subtrair ½ de a e somar ½ a b. Seja $W \sim N(np; np(1-p))$. Temos então

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(a - \frac{1}{2} \leq W \leq b + \frac{1}{2}\right)$$

Padronizando:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Também temos:

$$P(X \leq b) \cong P\left(W \leq b + \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad \text{e}$$

$$P(X \geq a) \cong P\left(W \geq a - \frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Como a v.a. original é discreta, faz sentido calcular a probabilidade (não nula) de X ser igual a uma constante a:

$$P(X = a) \cong P\left(a - \frac{1}{2} \leq W \leq a + \frac{1}{2}\right) = \Phi\left(\frac{a+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Por que é importante fazer a correção acima indicada?

Para melhor entender esse ponto, suponhamos, por exemplo, que X ~ Binomial(30; 0,4) o nosso objetivo seja calcular

$$P[10 \le X \le 15] = P[X = 10] + P[X = 11] + P[X = 12] + P[X = 13] + P[X = 14] + P[X = 15].$$

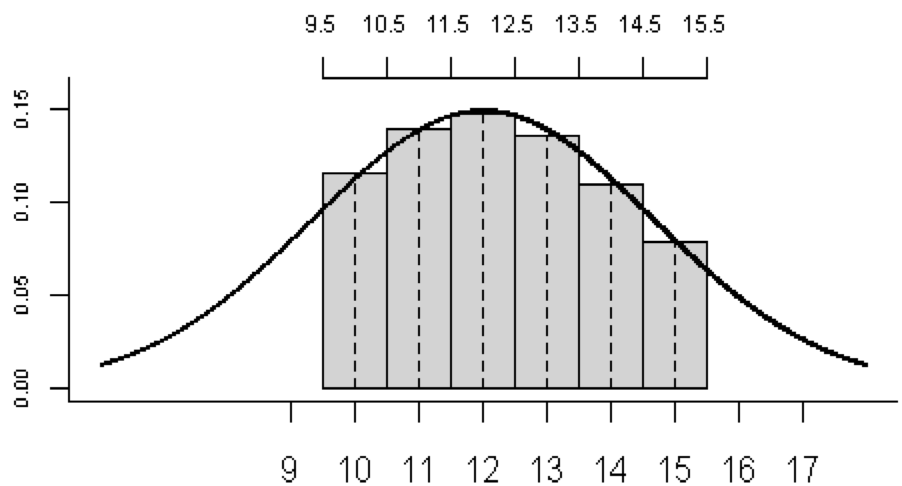
Aqui temos média = np = 30 x 0,4 = 12 e variância = np(1-p) = 30 x 0,4 x 0,6 = 7,2.

Sabemos que a distribuição de X é Binomial(30; 0,4)

Ela pode ser aproximada por uma Normal(12; 7,2).]

Também sabemos que, por ser a Normal uma distribuição contínua, a probabilidade de qualquer ponto particular vale zero.

Seja W ~ N(np; np(1–p). Então P(W=10) = P(W=11) = ... = P(W=15) = 0 .



Propriedades das medidas de centralidade, de dispersão e de interdependência –

Algumas propriedades da esperança, da variância, etc.

Pode-se provar que a esperança, a variância, a covariância, e outros conceitos similares do Cálculo de Probabilidades gozam de várias propriedades, entre as quais estão as seguintes (enunciadas de maneira informal):

a) A esperança da soma é igual à soma das esperanças, i.e., . $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

b) A esperança de constante vezes variável é igual à constante vezes a esperança da variável, i.e., .$E(c\cdot X)=c\cdot E(X)$

c) Se as variáveis são independentes(*), a esperança do produto é igual ao produto das esperanças, i.e., . $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

d) Existe uma relação entre a esperança e a variância de uma variável X, a saber, var(X) = $\mathbf{E}\left[(\mathbf{X}-\mathbf{E}(\mathbf{X}))^2\right]=\mathbf{E}(\mathbf{X}^2)-(\mathbf{E}(\mathbf{X}))^2$

e) A variância da soma é igual à soma das variâncias mais duas vezes a covariância, i.e., .$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$

f) A covariância é igual à esperança do produto menos o produto das esperanças, i.e., · $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

g) A variância de constante vezes variável é igual à constante ao quadrado vezes a variância da variável, i.e., .$Var(c\cdot X)=c^2 Var(X)$

h) A variância da soma é igual à soma das variâncias, i.e., , se as variáveis X e Y são independentes(*). $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

i) Se X1,X2,...,Xn são variáveis aleatórias com $E(X_i)=\mu_i$, $Var(X_i)=\sigma_i^2$ e sendo ai constantes, então $E(a_1X_1+a_2X_2...+a_nX_n) = a_1\mu_1+a_2\mu_2...+a_n\mu_n$; ;

j) Se alem disso $X_1,X_2,...,X_n$ são variáveis aleatórias independentes, então $Var(a_1X_1+a_2X_2...+a_nX_n) = a_1\ \sigma_1^2+a_2\ \sigma_2^2+...+a_n\ \sigma_n^2$

k) O módulo do coeficiente de correlação entre X e Y é menor ou igual a 1, i.e., .

$$|\rho(X,Y)|\le 1$$