CAPÍTULO 1
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Conceitos e resultados a serem apresentados neste capítulo:

- Modelo probabilístico
- Experimento aleatório - Espaço amostral – Evento – Probabilidade
- Eventos mutuamente exclusivos
- Permutações, Arranjos, Combinações
- Partição do espaço amostral
- Probabilidade condicional
- Teorema de Bayes
- Eventos independentes

"A experiência não permite nunca atingir a certeza absoluta. Não devemos procurar obter mais que uma probabilidade."

Bertrand Russell, filósofo

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Considere as seguintes situações:

- **João vai passar um fim de semana no Rio de Janeiro e quer saber se, na sua bagagem, precisa levar o guarda–chuva. Liga a TV, dá uma olhada no informe meteorológico do noticiário, e observa que haverá céu encoberto com possíveis chuvas. Como ele acredita no que diz a "moça do tempo", conclui que há uma probabilidade grande de chover. Embora não tenha condições de quantificar essa probabilidade, João opta por levar o guarda-chuva.**
- **Maria deseja fazer uma cirurgia plástica com o Dr. Pedro, mas, antes de tomar a decisão de se submeter a essa intervenção, gostaria de saber a chance de ser bem sucedida.**
- **Luisa quer se inscrever num concurso, no qual será examinada sobre um tópico a ser sorteado de uma lista de dez. Ela conhece muito bem o conteúdo de três desses tópicos, porém é absolutamente ignorante nos tópicos restantes. Ela deseja saber quão grande é a sua chance de ser aprovada.**

Em todos esses casos, o interesse é conhecer a probabilidade de um dado evento ocorrer, diante da necessidade de tomar uma decisão: levar ou não o guarda-chuva, fazer ou não a cirurgia plástica, inscrever-se ou não no concurso. Ainda mais: João só sabe que há grande probabilidade de chover porque o informe do tempo prognosticou chuva. Maria pode ter um valor estimativo para a probabilidade de sucesso na sua cirurgia plástica, mas será apenas uma aproximação. Luisa parece ser a única capaz de quantificar exatamente a probabilidade de ser bem sucedida na prova do concurso.

Modelos Determinísticos e Modelos Probabilísticos

- Na queda livre de um corpo no vácuo, a velocidade final, em cm/seg, atingida pelo corpo é dada pela fórmula $v = \sqrt{2gh}$ onde g é a aceleração da gravidade, em cm/seg^2, e h é a altura, em cm.
- O modelo usado na descrição de tal fenômeno é chamado de *modelo determinístico*, e pode ser expresso através de uma fórmula, como ocorre com muitas das leis da Física.

Entretanto há também situações práticas nas quais é impossível determinar com exatidão o resultado do experimento a partir de um conjunto de condições iniciais.

Suponha, por exemplo, que lançamos uma moeda e observamos a face que ela mostra ao cair. Sabemos que essa face pode ser "cara" ou "coroa", mas antes do lançamento não temos condições de dizer com precisão qual das duas faces será apresentada.

Em outras palavras, sabemos quais são os possíveis resultados do experimento, mas não podemos precisar qual deles será obtido.

O fenômeno em questão – cujo resultado é a face apresentada pela moeda quando ela cai – não pode ser descrito deterministicamente. O modelo usado na descrição não determinística de um fenômeno é chamado de *modelo probabilístico* ou *estocástico*.

A formulação e o estudo das propriedades dos modelos probabilísticos são alguns dos objetivos dos seis primeiros capítulos deste livro.

"O verdadeiro gênio reside na capacidade de avaliar informações ***incertas****, perigosas e conflitantes."*
Winston Churchill, estadista

Eu pensei que estava interessado em Incerteza,
mas agora não estou tão certo disso.

Um <u>experimento aleatório</u> apresenta as seguintes características:

a) Ele pode ser realizado quantas vezes desejarmos, sob condições essencialmente iguais.

b) O resultado do experimento não pode ser determinado "a priori", mas o conjunto de todos os resultados possíveis pode ser especificado.

c) O experimento apresenta a condição de regularidade estatística, no sentido de que, quando o número de realizações é muito grande, a freqüência relativa de um particular resultado se aproxima de um valor constante.

d) Além disso, com base na estabilidade estatística, podemos associar a cada resultado possível uma medida de confiança na ocorrência desse particular resultado. Assim sendo, no exemplo do lançamento da moeda, podemos dizer que as medidas de confiança nas ocorrências de "cara" e "coroa" são iguais.

Espaço amostral – é o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento aleatório. Será denotado por Ω.

Observação: Dizemos que o espaço amostral é **finito uniforme** se ele tem um número finito de elementos, sendo todos eles igualmente prováveis.

Exemplo 1.1: **Espaços amostrais**

a) No lançamento de uma moeda, os dois resultados possíveis são "cara" e "coroa". Assim sendo, escrevemos $\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$ ou $\Omega = \{c, k\}$.

b) Lançamos um dado e registramos o número de pontos obtidos. Há seis resultados possíveis e o espaço amostral pode ser descrito por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

c) As peças fabricadas diariamente em uma linha de produção podem ser classificadas como "perfeitas" e "defeituosas". Uma peça é extraída, $\Omega = \{\text{perfeita, defeituosa}\}$.

d) Um equipamento é usado para fazer a contagem do número de bactérias de um certo tipo em uma lâmina. O espaço amostral pode ser descrito como $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

e) Observa-se o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa durante um certo intervalo de tempo. Aqui novamente $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

f) Na duração em horas de uma lâmpada, o espaço amostral pode ser descrito como o conjunto de todos os valores possíveis do seu tempo de vida t. Ou seja, $\Omega = \{t \mid t > 0\}$.

Pergunta: **Entre os espaços amostrais finitos do exemplo 1.1 existe algum que seja uniforme?**

O espaço amostral pode ser **finito** ou **infinito**. Os espaços amostrais dos exemplos **a), b) e c) são finitos** porque há um número finito de resultados possíveis. Os espaços dos exemplos **d), e) e f) são infinitos**.

É importante frisar que os espaços amostrais dos três últimos exemplos são uma idealização da realidade. De fato, é difícil conceber como infinito o número de bactérias em uma lâmina ou o número de partículas emitidas por uma substância radioativa. Nossa percepção nos diz que esse número pode ser muito grande, porém finito; contudo não há maneira de se estabelecer um limite superior para ele. Por esse motivo assumimos que nestes casos o espaço amostral é infinito.

No caso do exemplo f) o tempo está medido em horas, e aceitamos como possível qualquer duração t maior que zero. Devido à impossibilidade de se estabelecer com exatidão um limite superior para t, assumimos novamente que este limite superior é infinito.

d) Um equipamento é usado para fazer a contagem do número de bactérias de um certo tipo em uma lâmina. O espaço amostral pode ser descrito como $\Omega = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$.

e) Observa-se o número de partículas emitidas por uma fonte radioativa durante um certo intervalo de tempo. Aqui novamente $\Omega = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$.

f) Na duração em horas de uma lâmpada, o espaço amostral pode ser descrito como o conjunto de todos os valores possíveis do seu tempo de vida t. Ou seja, $\Omega = \{t \mid t > 0\}$.

Pergunta: Entre os espaços amostrais finitos do exemplo 1.1 existe algum que seja uniforme?

O espaço amostral pode ser **finito** ou **infinito**. Os espaços amostrais dos exemplos **a), b) e c) são finitos** porque há um número finito de resultados possíveis. Os espaços dos exemplos **d), e) e f) são infinitos**.

Evento – é um subconjunto do espaço amostral. Geralmente é denotado por uma letra maiúscula: A, B, C, etc.

<u>Exemplo 1.2</u>: Lançamento de um dado

- No lançamento de um dado. O espaço amostral é $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- Seja A o evento descrito como A = {o resultado é um número par}.
- Os resultados que satisfazem essa condição são 2, 4 e 6. Assim, podemos escrever $A = \{2,4,6\}$. Notemos que em um lançamento de um dado só pode ocorrer um resultado. Se ele for 2 ou 4 ou 6 diremos que o evento A ocorreu.
- Se o resultado for 1 ou 3 ou 5, diremos que A **não** ocorreu.
- Assim, um dado evento A ocorrerá se, e somente se, um resultado que pertence a A ocorrer.

1.3 Eventos especiais

- Dado que todo conjunto é subconjunto dele próprio, o espaço amostral Ω é um evento chamado de *evento certo*.
- Um evento pode conter um único resultado. Diremos que ele é um *evento simples* ou *evento elementar*. Em nosso exemplo, $B = \{3\}$ é um evento simples.
- Teoricamente faz sentido falar em um *evento carente de resultados*. Tal evento será chamado de *evento vazio* (ou *evento impossível*) e será denotado por Ø.

Pela própria definição terá sentido aplicar a eventos a álgebra de *Boole*. Assim podemos falar em **união**, **interseção**, **complementação de eventos**, e determinar probabilidades para os eventos resultantes.

$A \bigcup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, pelo menos um dos eventos, A ou B, ocorre.
$A \bigcap B$ é o evento que ocorre se ambos, A e B, ocorrerem simultaneamente.
A^c, chamado *evento complementar de A*, é o evento cujos resultados pertencem a Ω mas não a A.

Considere um espaço amostral Ω associado a um experimento aleatório e sejam A e B dois eventos contidos em Ω: Diremos que A e B são ***mutuamente exclusivos*** se eles não possuem elementos comuns, isto é, se $A \bigcap B = \varnothing$.

Diremos que A e B são *mutuamente exclusivos* se eles não possuem elementos comuns, isto é, se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 1.3 .: Operações com eventos.

Consideremos o lançamento de um dado equilibrado.
Sejam A = {número par}, B={número maior que 4} e C = {3} .

Então $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{ 5, 6 \}$ e $C = \{ 3 \}$

Também temos :

- **$A \cup B = \{ 2 , 4, 5, 6 \}$, $A \cap B = \{ 6 \}$, $A \cup C = \{2 , 3, 4, 6 \}$ $A \cap C = \emptyset$, $B \cup C = \{3,5, 6 \}$.**
- **Observamos que A e C são mutuamente exclusivos. O mesmo acontece com B e C.**
- **Também, $A^C = \{1, 3, 5\}$, $B^C = \{1, 2, 3, 4\}$ e $C^C = \{ 1, 2, 4, 5, 6\}$**
- **Naturalmente, a álgebra de *Boole* aplicada a eventos pode ser usada para qualquer número deles. Assim, em nosso caso, $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $A \cap B \cap C = \emptyset$.**

1.4 Probabilidades : Conceito clássico

- **Há diversas situações práticas onde é possível calcular probabilidades de determinados eventos ocorrerem, fazendo uma analogia entre esses problemas e os jogos de azar.**
- **Por isso nos livros de probabilidade é muito comum aparecerem vários exemplos com moedas, dados, baralhos, roletas, etc**
- **Note que nesses tipos de exemplo os espaços amostrais considerados são finitos. Ainda mais, se moedas, dados, baralhos, etc são equilibrados, os espaços amostrais são uniformes.**
- **De fato, no lançamento de uma moeda equilibrada, por exemplo, não há razões para se supor que "cara" tem mais chance de ocorrer que "coroa".**
- **O conceito clássico de probabilidade, apresentado a seguir é perfeitamente adequado a este tipo de problemas.**

Conceito Clássico de Probabilidade

- **Seja Ω um espaço amostral finito uniforme e seja A um evento qualquer desse espaço. A probabilidade de A, denotada por P(A), é dada por**

$$P(A) = \#(A) / \#(\Omega)$$

- **onde $\#(\Omega)$ é o número de resultados possíveis do experimento**
  $\#(A)$ é o número de resultados favoráveis à ocorrência do evento A.

É claro que $0 \leq P(A) \leq 1$.

1.5 Probabilidades: Conceito Freqüentista

Considere um experimento onde o evento **A** pode ou não ocorrer. Como definir o que é a probabilidade de o evento **A** ocorrer? Uma resposta possível a essa pergunta é a que dá origem ao **conceito frequentista de probabilidade**:

Suponha que esse experimento foi repetido **n** vezes, sempre sob as mesmas condições, e que o evento **A** ocorreu **m** vezes entre essas **n** realizações do experimento. Então a fração **m/n** é uma boa aproximação para a probabilidade de **A**, se o número **n** de repetições for bastante grande.

Simbolicamente, $P(A) \cong \dfrac{m}{n}$

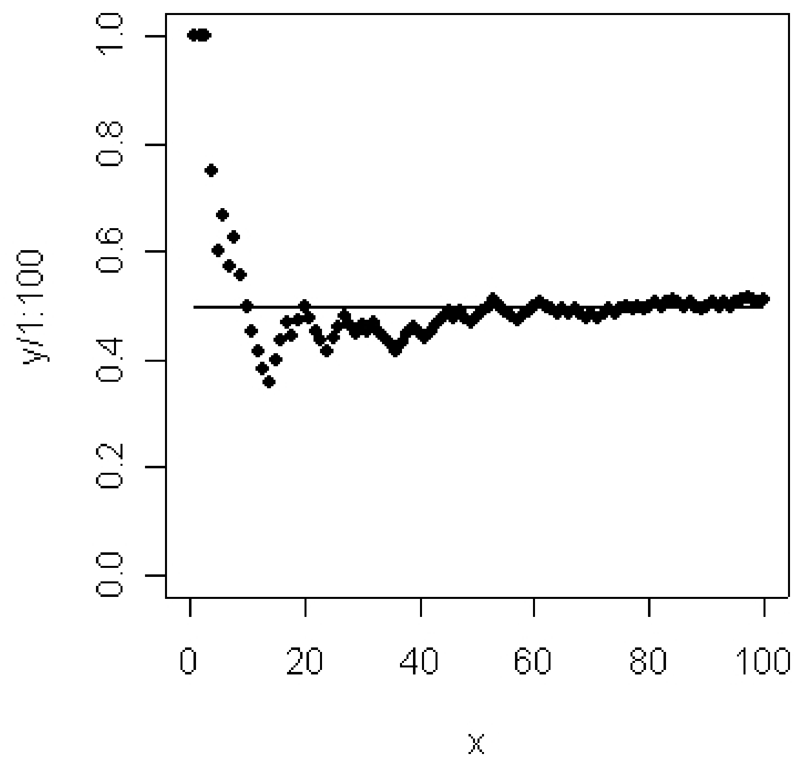
O conjunto de todos os resultados possíveis do experimento é chamado o **espaço amostral** e será aqui representado pela letra Ω.

Calculando probabilidade usando o conceito Frequentista

Lançar uma moeda 100 vezes, a cada passo calcular a probabilidade de dar cara (k = coroa, c = cara).

<u>Resultado dos Comandos</u>: y - Acumulado

1c	2c	3c	3k	3k	4c	4k	5c	5k	5k
5k	5k	5k	5k	6c	7c	8c	8k	9c	10
10	10	10	10	11	12	13	13	13	14
14	15	15	15	15	15	16	17	18	18
18	19	20	21	22	22	23	23	23	24
25	26	27	27	27	27	27	28	29	30
31	31	31	31	32	32	33	33	33	34
34	35	36	36	37	38	38	39	39	40
41	41	42	43	43	43	44	44	44	45
46	46	47	47	48	49	50	50	50	51




```
>x=1:100; y=cumsum(sample(0:1,100,rep=T))
>plot(x,y/1:100, ylim=c(0,1), xlim=c(0,100), pch=16)
>segments(1,0.5,100,0.5)
```

Jogos dos dois dados

1. Dois jogadores.
2. Em cada jogada, cada jogador lança um dado e somam-se os pontos dos dois dados.

- O Jogador **A** marca um ponto se a soma for 5, 6, 7 ou 8.
- O Jogador **B** marca um ponto se a soma for 2, 3, 4, 9, 10, 11 ou 12.

- Qual, entre os jogadores A e B, tem maior probabilidade de ganhar?

Usando o R (Jogos dos 2 Dados)

>soma.dado=sample(1:6,100,replace=T)+sample(1:6,100,replace=T)

> table(sample(1:6,1000,replace=T)+sample(1:6,1000,replace=T))/1000

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	P(A)
0.024	0.055	0.077	0.111	0.131	0.178	0.153	0.106	0.084	0.059	0.022	**0.573**
0.040	0.059	0.082	0.115	0.129	0.155	0.143	0.102	0.090	0.058	0.027	**0.542**
0.030	0.054	0.078	0.100	0.137	0.155	0.140	0.123	0.086	0.074	0.023	0.532
0.023	0.047	0.083	0.123	0.137	0.164	0.140	0.122	0.075	0.065	0.021	0.564

Jogo dos Cinco Dados

Lança-se os cinco dados. Para ganharmos tem que sair o número 5, mas não pode sair o 6. Qual a probabilidade de ganhar?

<u>Função:</u>

```
jogo.5dados=function(N)
{
  ind=rep(0,N)
  for (j in 1:N)  {
      # criar uma jogada de 5 dados
      D=sample(1:6, 5, replace=T)
      # verificar de existe 5 e se existe 6 em cada jogada
      i5=0
      i6=0
      for (i in  1:5) {
          if (D[i] == 5) i5=1
          if (D[i] == 6) i6=1
      }
      # verificar se tem 5 e entao se nao tem 6
      if ( (i5==1) & (i6==0) ) ind[j]=1      }
  sum(ind)/N                                   }
```

Resultados

```
> jogo.5dados(10)
   [1] 0.3
> jogo.5dados(10)
   [1] 0.2
> jogo.5dados(10)
   [1] 0.3
> jogo.5dados(15)
   [1] 0.3333333
> jogo.5dados(15)
   [1] 0.2
> jogo.5dados(15)
   [1] 0.1333333
> jogo.5dados(15)
   [1] 0.2666667
```

```
> jogo.5dados(150)
   [1] 0.3
> jogo.5dados(150)
   [1] 0.2866667
> jogo.5dados(150)
   [1] 0.22
> jogo.5dados(150)
   [1] 0.2533333
> jogo.5dados(1500)
   [1] 0.2986667
> jogo.5dados(1500)
   [1] 0.2533333
> jogo.5dados(1500)
   [1] 0.2646667
```

Jogo dos Cinco Dados (Solução analítica)

<u>Número de casos possíveis</u> quando lançam-se 5 dados:

<u>6</u> <u>6</u> <u>6</u> <u>6</u> <u>6</u> = 6^5 = **7776**

<u>Número de casos favoráveis</u> (sair 5, mas **<u>não</u>** sair 6):

Será feito em duas etapas:

1. Não sair 6, só os números de 1 a 5 => 5^5 = 3125
2. Não sair 6, mas tem que sair 5.

   Dos 3125 subtrair os casos em que também não sai 5.

   Números de 1 a 4 => 4^5 = 1024

Casos favoráveis => 3125 – 1024 = **2101**

$$P(\text{ganhar}) = \frac{2101}{7766} = 0{,}27019$$

Comparando os conceitos Frequentista e Clássico, sugerindo o Subjetivo

- **O conceito frequentista é mais abrangente do que o conceito clássico de probabilidade, já que ele se aplica, mesmo quando o espaço amostral não é finito uniforme. Porém, embora o conceito frequentista nos forneça uma maneira de medir na prática a probabilidade de ocorrência de um determinado evento, há casos em que ele também não é aplicável**

Deu na mídia : Em 2009, nas vésperas do confronto com a seleção de futebol da Argentina o jogador Kaká afirmou que o Brasil tinha 75% de chances de ganhar. Já o jogador Luis Fabiano foi mais otimista e disse que essas chances eram de 80%.

- **Este é um exemplo típico da atribuição de probabilidades a um evento sem uma base na definição <u>clássica</u> nem na <u>frequentista</u>. É o típico "chutômetro", que no caso de jogadores de futebol até pareceria ter sentido. Entretanto este tipo de comentário é freqüente em várias situações, e não apenas no esporte.**

- **É claro que existem situações onde faz todo sentido pensarmos em atribuir um valor à probabilidade de algo ocorrer, embora não seja possível determinarmos empiricamente esse valor.**

Por exemplo, como determinar a probabilidade de um atentado semelhante ao das Torres Gêmeas vir a acontecer nos próximos 5 anos? Ou a probabilidade de acontecer uma queda geral das bolsas de valores como em agosto de 2008? Analistas políticos (no primeiro caso) e financeiros (no segundo caso) talvez possam ter alguma idéia sobre o tema, porém qualquer quantificação da incerteza que apresentem será apenas subjetiva.

- **Esta é uma terceira forma de se conceituar o que seja a probabilidade de ocorrência de um determinado evento A. Segundo essa abordagem, a probabilidade de A acontecer refletiria o grau de confiança do observador quanto à ocorrência ou não do evento em questão.**

1.6 Definição Axiomática e propriedades das probabilidades

Seja Ω um espaço amostral associado a um experimento aleatório, A um evento qualquer deste espaço amostral e P(A) um número real, denominado *probabilidade do evento A,* onde as seguintes propriedades são verificadas:

1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

4) Se A1 , A2 , A3 , ..., An ,... é uma seqüencia de eventos, dois a dois mutuamente exclusivos,

$$P\left(\bigcup A_i\right) = P(A1) + P(A2) + P(A3) + \ldots + P(Ak) + \ldots = \sum P(A_i)$$

Propriedades das Probabilidades

As probabilidades possuem uma série de propriedades, válidas independentemente da forma como elas podem ser obtidas.

1) $P(\emptyset) = 0$

2) Para todo evento A, $P(A^C) = 1 - P(A)$

3) Para quaisquer dois eventos A e B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4) Para quaisquer três eventos A, B, C,

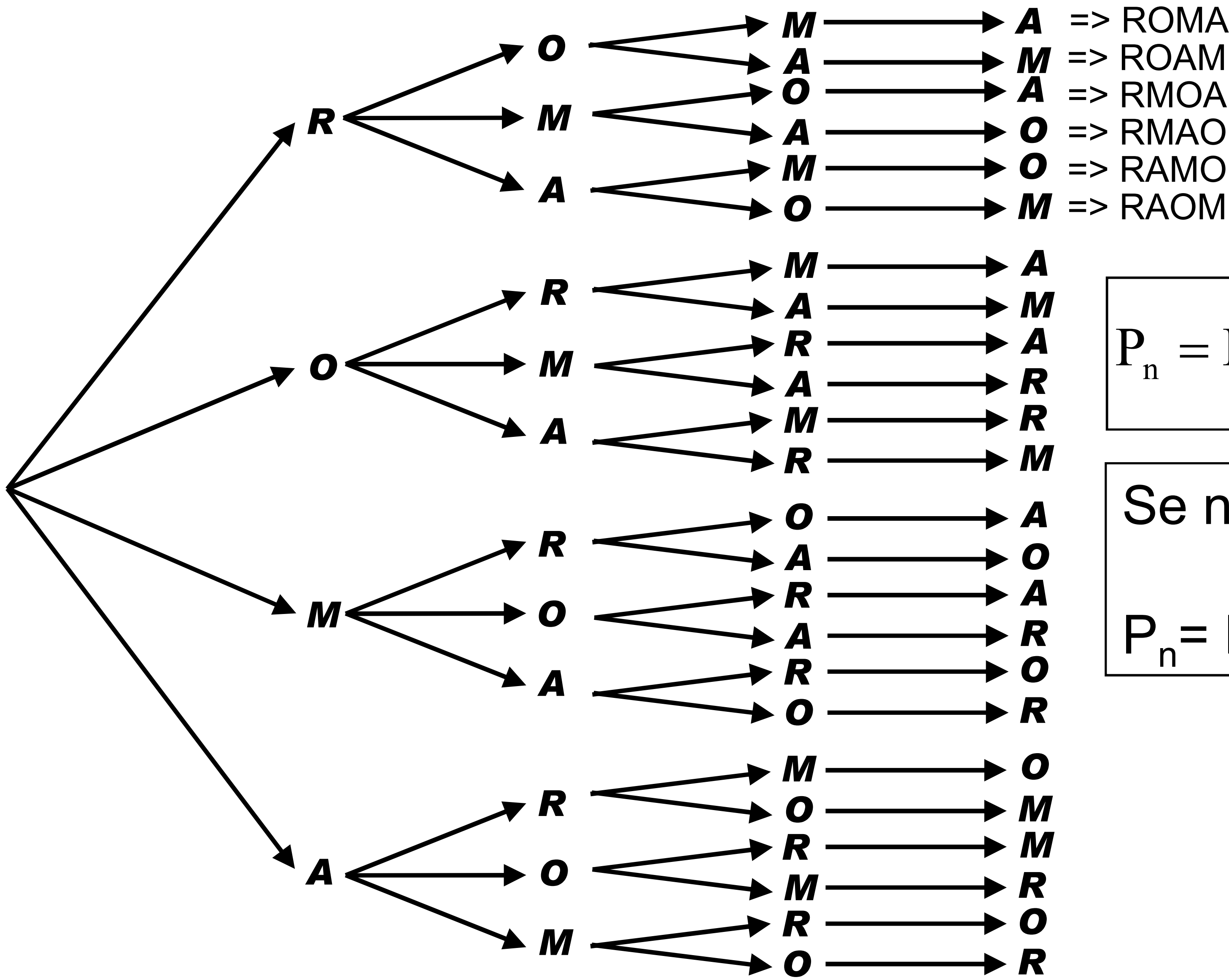
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

5) Se A e B são eventos tais que $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$

1.7 Espaços de probabilidades finitos – Técnicas de Contagem

ASSUNTO	NOTAÇÃO	CÁLCULO	OBSERVAÇÕES
Permutação de r objetos distintos	P_n=P(n,n)	n!	A ordem entre os n objetos importa
Arranjo de n objetos, distintos, r a r	A(n,r) =P(n,r)	$\frac{n!}{(n-r)!}$	A ordem entre os n objetos importa
Combinação de n objetos, distintos, r a r	$C(n,r) = C_n^r = \binom{n}{r}$	$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$	A ordem entre os n objetos não importa. $\binom{n}{r} = \frac{A(n,r)}{r!}$ Para fazermos um arranjo de n, r a r; primeiro selecionamos r elementos entre os n e depois os arrumamos
Combinação com elementos Repetidos $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$	$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \binom{n}{n_1 \cdots n_r}$	$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$	$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\cdots\binom{n-(n_1+\cdots+n_{r-1})}{n_r}$

Permutação



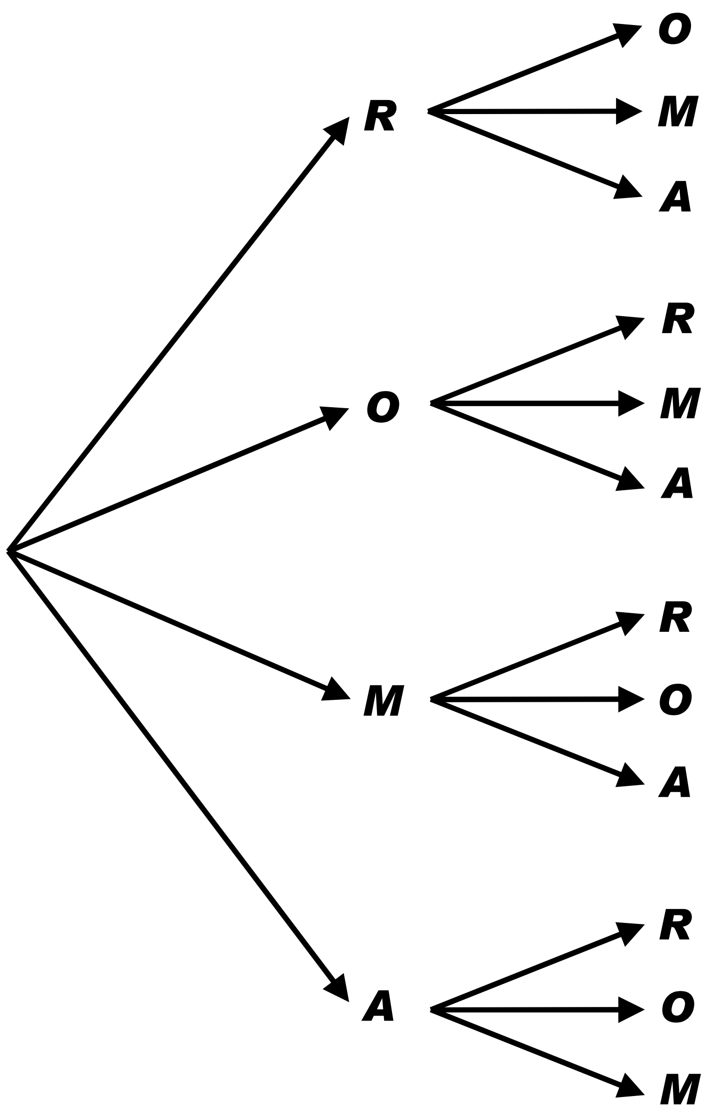
$$P_n = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Se n = r, então

$P_n = P(n,n) = n!$

4 x 3 x 2 x 1

Arranjo



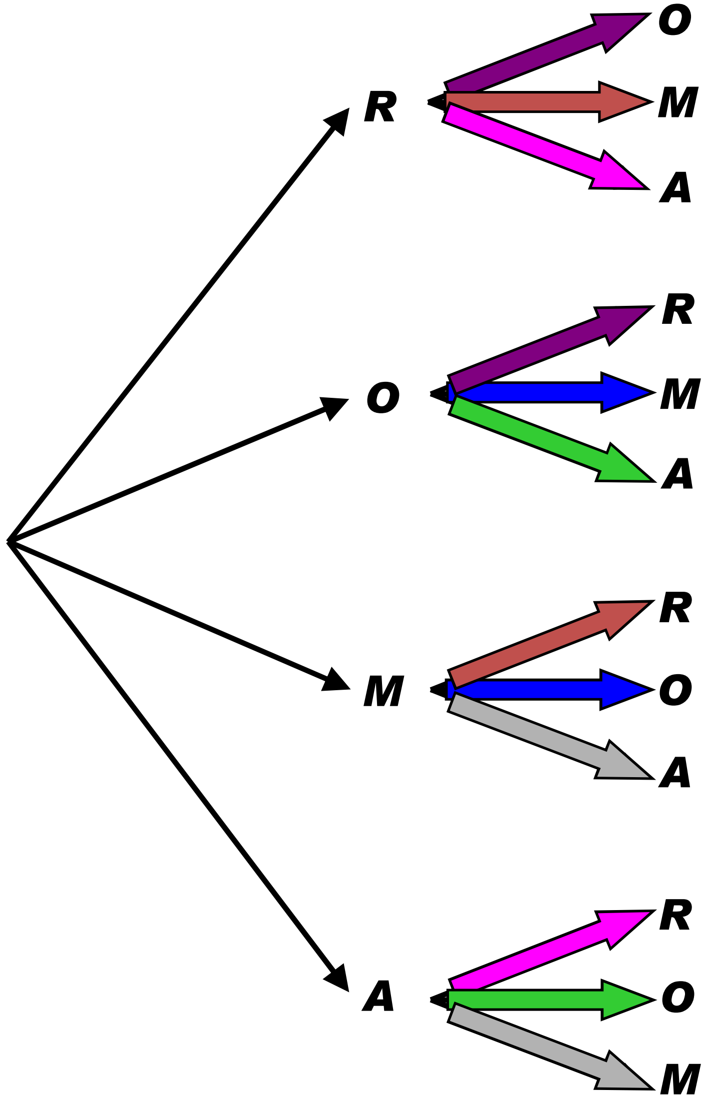
4 x 3

$$\boxed{A_n^r = A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}$$

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}_{r}$$

Elementos

Combinação



4 x 3

$$C_n^r = C(n, r) = \binom{n}{r} =$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Combinação com Repetição

E S T A T I S T I C A

j		n_j	
1	E	1	=> n_1
2	S	2	=> n_2
3	T	3	=> n_3
4	A	2	=> n_4
5	I	2	=> n_5
6	C	1	=> n_6

$$\boxed{11 = \sum n_j}$$

$$\boxed{\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \ldots \quad n_k} = \frac{n!}{n_1! \; n_2! \; \ldots \; n_k!}}$$

$$\sum n_j = n$$

1.8 Probabilidade Condicional

Fernando pede a um amigo para extrair uma carta de um baralho de 52 cartas e solicita uma informação sobre ela. O amigo só lhe diz que a carta é uma figura de copas. Com esse dado Fernando deve calcular a probabilidade da carta ser um rei. Isto é, ele já tem uma informação sobre a carta selecionada. Temos assim um evento **A = "A carta é uma figura de copas"**, um evento **B = "A carta é um rei"** e desejamos determinar a probabilidade de **B quando é sabido que A ocorreu**. Uma probabilidade dessa natureza é chamada de **probabilidade condicional**.

Em geral, se A e B são eventos que podem ocorrer em um dado experimento, a **probabilidade condicional** de B ter ocorrido, quando se sabe que A ocorreu, é representada por **$P(B|A)$**. (Leia-se probabilidade de B dado A).

Embora o baralho tenha 52 cartas o espaço amostral para Fernando ficou reduzido às 3 figuras de copas: valete, dama e rei . Isto é, ao número de elementos de A. Como há 1 rei entre essas 3 figuras, concluímos que **$P(B|A) = 1/3$**

Ou seja, para calcularmos $P(B|A)$ procedemos como se A fosse o novo espaço amostral que chamaremos de **espaço *amostral reduzido*** e a probabilidade será calculada considerando no numerador o número de **elementos de B que estão em A**, ou seja , **a interseção de A com B**.

Exe. 1.13 – Estudantes classificados por curso e por sexo

Suponha que num determinado ano entraram 200 alunos numa universidade, sendo 100 do curso de Letras e 100 do curso de Engenharia:

Curso	Sexo		Total
	Masculino (M)	Feminino (F)	
Letras (L)	10	90	100
Engenharia (E)	70	30	100
Total	80	120	200

Um aluno é sorteado ao acaso e verifica-se que é do curso de Letras. Qual a probabilidade deste aluno ser do sexo feminino?

Deseja-se calcular $P(F | L)$, isto é, a probabilidade de o aluno ser do sexo feminino, dado que o aluno sorteado é de Letras.

Com a informação a priori de que o aluno é do curso de Letras o espaço amostral não é constituído mais por todos os alunos, mas só pelos que são de Letras.

Usando o conceito clássico de probabilidade, podemos calcular $P(F | L)$ da seguinte forma:

O número de elementos do espaço amostral reduzido é $\#(L)=100$.

O evento "o aluno é do sexo feminino, sabendo-se que o aluno sorteado é de Letras" é formado pelos alunos que além de serem de Letras são também do sexo feminino, então o número de elementos favoráveis a este evento é $\#(F \cap L)=90$.

Portanto, **$P(F | L) = \#(F \cap L) / \#(L) = 90/100$**

Observe que podemos dividir tanto o numerador quanto o denominador pela mesma quantidade $\#(\Omega)=200$, desta forma .

$$\frac{\#(F \cap L)}{\#(L)} = \frac{90}{100} = \frac{90/200}{100/200} = \frac{\#(F \cap L)/\#(\Omega)}{\#(L)/\#(\Omega)} = \frac{P(F \cap L)}{P(L)}$$

Partição de um Espaço Amostral

Dizemos que os eventos A1, A2, .., Am formam uma partição do espaço amostral Ω se

a) P(Ai) > 0 , para todo i (i= 1, 2, ..., m)

b) $A_i \cap A_j =$, para todo i ≠ j

c) $\bigcup A_i = \Omega$

Seja B um evento qualquer do espaço amostral . Então os eventos $A_1 \cap B$, $A_2 \cap B$,..., $A_m \cap B$ são todos mutuamente exclusivos e $B = \bigcup (A_i \cap B)$

Figura 1.4 – Uma partição do espaço amostral. Aqui, m=5

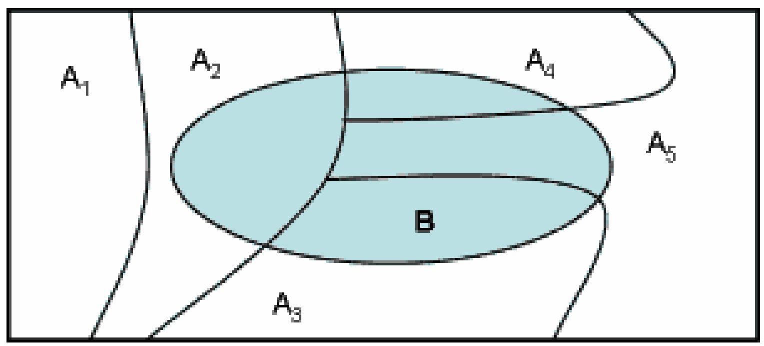


Figura 1.4 – Uma partição do espaço amostral. Aqui, m=5

Daí, $\mathbf{P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \ldots + P(A_m \cap B) = \Sigma\, P(B|A_i)P(A_i)}$

Teorema da Probabilidade Total

Se os eventos A1, A2,...., Am formam uma partição do espaço amostral Ω e B é um outro evento qualquer desse espaço então:

$$P(B) = \Sigma\ P(B|Ai)P(Ai)$$

Exemplo 1.18 – Duração de Componentes eletrônicos

A probabilidade de um componente eletrônico de um computador falhar antes de 1000 horas de funcionamento é: 0,05, se for da marca A1; 0,10, se for da marca A2; e 0,15, se for da marca A3. Numa loja de manutenção, 50% dos componentes em estoque são da marca A1, 20% da marca A2 e 30% da marca A3. Um componente é escolhido ao acaso para o conserto de um computador. Determine a probabilidade de que ele funcione perfeitamente por mais de 1000 horas.

Solução*:*

Representemos por Ai o evento "o componente escolhido é da marca Ai", para i = 1, 2, 3. Notemos que se Ω representa os resultados de todas as possíveis seleções de um componente para o conserto do computador, então os eventos A1, A2 e A3 representam uma partição de Ω.

Denotemos por B o evento "o componente falha antes de 1000 horas de funcionamento".

Então $B = (A1 \cap B) \cup (A2 \cap B) \cup (A3 \cap B)$ e, pelo Teorema da Probabilidade Total,

$P(B) = P(B|A1)P(A\mathbf{1}) + P(B|A2)P(A2) + P(B|A3)P(A3)$

As probabilidades de que precisamos são:

$P(A1) = 0{,}5$; $P(A2) = 0{,}2$; $P(A3) = 0{,}3$

$P(B|A1) = 0{,}05$; $P(B|A2) = 0{,}10$; $P(B|A3) = 0{,}15$

Assim,

$P(B) = 0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}10 \times 0{,}20 + 0{,}15 \times 0{,}30 = 0{,}09$

Essa é a probabilidade de um componente escolhido ao acaso vir a falhar antes de 1000 horas. Logo, a probabilidade dele se manter em funcionamento por mais de 1000 horas será

$P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$ ou 91%.

1.9 Teorema da Probabilidade Total e Teorema de Bayes

Se os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ formam uma partição do espaço amostral Ω (ou seja, um e somente um entre esses eventos ocorrerá) e B é um outro evento qualquer então,

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)\,P(A_i)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)\,P(A_n)}$$

para todo i = 1,2,...,m

Como interpretar esse resultado?

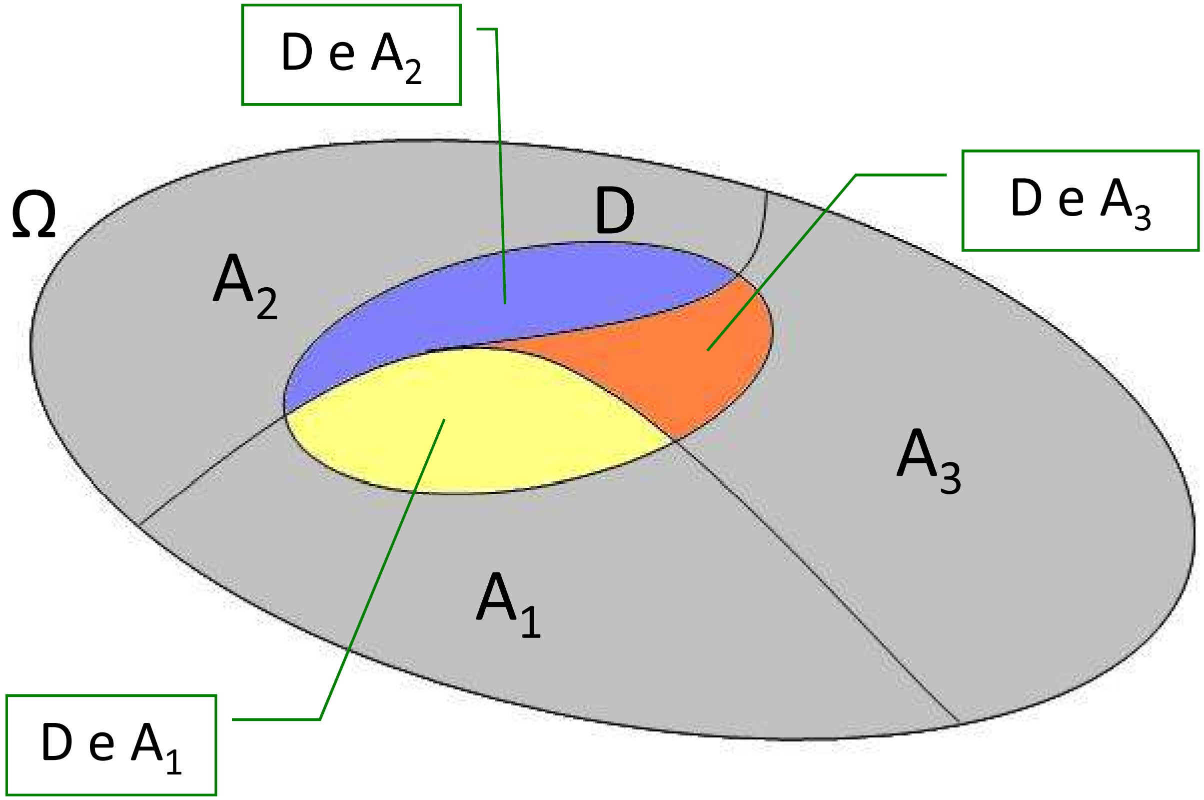
EXEMPLO :

A empresa X compra peças de 3 fornecedores A_1, A_2 e A_3 nas proporções de 50%, 30% e 20%, respectivamente. Sabe-se que, em média:

- 5% das peças fabricadas por A_1 apresentam defeitos;
- 2% das peças fabricadas por A_2 apresentam defeitos;
- 1% das peças fabricadas por A_3 apresentam defeitos;

Se uma peça extraída ao acaso do estoque de X é defeituosa, qual a probabilidade de que ela tenha sido produzida por A_1? E por A_2? E por A_3?

Esquema do Ex. 1



Conhecemos:

- $P(A_1)$
- $P(A_2)$
- $P(A_3)$
- $P(D|A_1)$
- $P(D|A_2)$
- $P(D|A_3)$

Calcular:

$P(A_i|D) = ?$

Resolução do Exemplo 1

Seja B o evento que representa a peça ser defeituosa.

Pelo Teorema de Bayes, temos:

$$P(A_1|B) = \frac{0{,}05 \times 0{,}5}{0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}02 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}2} = 0{,}76$$

$$P(A_2|B) = \frac{0{,}02 \times 0{,}3}{0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}02 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}2} = 0{,}18$$

$$P(A_3|B) = \frac{0{,}01 \times 0{,}2}{0{,}05 \times 0{,}5 + 0{,}02 \times 0{,}3 + 0{,}01 \times 0{,}2} = 0{,}06$$

Isto quer dizer que, pelo fato de sabermos que a peça extraída é defeituosa, as chances que atribuímos a cada um dos fornecedores A_1, A_2 e A_3 de tê-la fabricado não são mais de 50%, 30% e 20%, e sim de 76%, 18% e 6% respectivamente.

Eventos Independentes

Dizemos que 2 eventos A e B associados ao mesmo experimento são **independentes** se

$$\mathbf{P\ (A\ e\ B) = P\ (A).P(B)}$$

Obs.: Se A e B são independentes, P(A) > 0 e P(B) > 0, então :

$$\mathbf{P(A|B) = P(A)\ \ e\ \ P(B|A) = P(B)}$$

Exemplo:

Experimento: Extração de uma carta do baralho

A = valete B = copas

P(A e B) = 1/52 = 4/52 . 13/52 = P(A) . P(B)

A e B são independentes.

<u>Exemplo 1.22</u>: Lavadora e Secadora

Em determinado condomínio residencial há duas máquinas antigas à disposição dos moradores que desejam lavar suas roupas: uma lavadora e uma secadora. A lavadora costuma estar funcionando apenas durante 60% do tempo e a secadora durante 80% do tempo. Maria acaba de entrar na lavanderia onde ficam as duas máquinas com um cesto de roupas sujas. Calcule a probabilidade de que:

1. ela consiga sair dali com suas roupas lavadas e secas;
2. ela saia com as roupas lavadas, mas sem secar;
3. ela não consiga nem mesmo lavar suas roupas.

<u>Solução</u>:

Sejam L = “Lavadora funcionando” e S = “Secadora funcionando”.

Temos então P(L) = 0,60 e P(S) = 0,8.

Admitindo que o funcionamento da lavadora e o funcionamento da secadora são independentes entre si, temos:

$$P(L \cap S) = P(L)P(S) = 0,6 \times 0,0 = 0,40$$

$$P(L \cap S^C) = P(L)P(S^C) = 0,6 \times (1 - 0,8) = 0,12$$

$$P(L^C) = 1 - 0,6 = 0,40$$

Apenas checando: 0,48 + 0,12 + 0,40 = 1. OK!